עבודת גמר – על הקשר בין טיפוסי האיזומורפיזם של חבורה סופית לטיפוסי האיזומורפיזם של תת-חבורות הסילו שלה

תוכן העניינים

תקציר

עבודה זו עוסקת בשאלה הכללית של מגבלות על טיפוס האיזומורפיזם של חבורה בהינתן טיפוסי האיזומורפיזם של תת-חבורות הסילו שלה ומספרי הסילו. נציג מקרים שבהם ניתן לאפיין את טיפוסי האיזומורפיזם על פי נתונים אלה בלבד, ודוגמאות אחרות של חבורות לא איזומורפיות שחבורות הסילו שלהן איזומורפיות, ומספרי הסילו שלהן שווים לכל ראשוני שמחלק את סדר החבורה. נוכיח שעבור חבורות שסדרן מתחלק בשני ראשוניים שונים וחבורות הסילו שלהן ציקליות, טיפוס האיזומורפיזם של החבורה נקבע באופן יחיד על פי סדרן של תת-חבורות הסילו, מספרי הסילו וסדר המרכז. כמו-כן, נדון בדוגמאות נוספות, שעשויות להצביע על כיווני מחקר עתידיים.

1. מבוא

תהי G חבורה סופית[1] ותהי p^{α} החזקה המקסימלית של הראשוני p שמחלקת את הסדר $|G|$ של החבורה.

על-פי משפטי סילו (ראו פירוט בפרק 2) יש ל- G תת-חבורה מסדר p^{α}. כל תת-חבורה של G מסדר p^{α} נקראת תת-חבורת סילו- p והן כולן צמודות זו לזו ובפרט איזומורפיות. נסמן ב- $Syl_p(G)$ את קבוצת תת-חבורות הסילו- p של G. מספר האיברים בקבוצה $Syl_p(G)$ מכונה מספר הסילו- p של G ומסומן n_p.

תהי $\pi(G)=\{p_1,\ldots,p_n\}$ קבוצת המחלקים הראשוניים של G. נגדיר את טיפוסי הסילו של החבורה להיות רשימת טיפוסי האיזומורפיזם של תת-חבורות הסילו הלא טריוויאליות של החבורה.

בעבודה זו נעסוק בשאלה הבאה :

עד כמה טיפוסי הסילו של G ומספרי הסילו של G, קובעים את טיפוס האיזומורפיזם של G?

הערה : קל לראות שבמקרה הכללי, טיפוסי הסילו לבדם אינם קובעים את טיפוס האיזומורפיזם של G באופן יחיד. לדוגמה, החבורה הסימטרית S_3 והחבורה הציקלית C_6, הן שתי חבורות לא איזומורפיות מסדר 6 וטיפוסי הסילו שלהן הם C_2 ו- C_3. עם זאת, $n_2(S_3)=3\neq n_2(C_6)=1$.

המוטיבציה לשאלת המחקר מגיעה מן האנלוגיה בין קיום תת-חבורות הסילו של G ויחידותן עד כדי איזומורפיזם, לקיום ויחידות הפירוק הראשוני של $|G|$ ומן התוצאות הרבות בתורת החבורות שמקשרות בין תכונות של תת-חבורות הסילו לתכונות של החבורה. כמובן שאין לצפות לאנלוגיה מלאה בין תת-חבורות הסילו של חבורה כללית לבין הגורמים הראשוניים של מספר טבעי, אך עדיין יש עניין גם בתוצאות חלקיות ומוגבלות.

מכיוון שהשאלה הכללית גדולה ומורכבת, התרכזנו בבחינה של מקרים פרטיים ויחסית פשוטים שלה, שהוגדרו על ידי הגבלות על טיפוסי הסילו (ציקליות), ומספר הגורמים הראשוניים של סדר החבורה.

[1] בעבודה זו נעסוק אך ורק בחבורות סופיות. אי לכך, בכל מקרה בו נדון בחבורה, הכוונה היא לחבורה סופית, אלא אם יצוין אחרת.

בעבודה זו נוכיח את הטענות הבאות:

1. **משפט 1**: תהיינה G,H שתי חבורות ונתון שכל מספרי הסילו של-G שווים ל-1. אזי G ו-H איזומורפיות אם ורק אם כל מספרי הסילו של-H שווים ל-1 ולכל ראשוני p תת-חבורת הסילו-p של G איזומורפית לתת-חבורת הסילו-p של H.
2. **מסקנה**: אם G חבורה נילפוטנטית, אזי טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-פי טיפוסי הסילו של G. בפרט, אם G חבורה אבלית אזי ממשפט 2.16, טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-פי טיפוסי הסילו של G.

הגדרה: חבורה G נקראת חבורת-Z אם כל טיפוסי הסילו של G הן חבורות-p ציקליות.

המקרה העיקרי שניתחנו הוא שלחבורות-Z שסדרן מתחלק בשני ראשוניים בלבד (חבורות $\{p,q\}$). כבר במקרה זה ניתן להדגים את העובדה שטיפוסי הסילו של חבורה G בצירוף מספרי הסילו שלה אינם בהכרח מספיקים כדי לקבוע את טיפוס האיזומורפיזם של G. עם זאת, הניתוח המלא מראה שבמקרה זה ניתן להבדיל בין טיפוסי האיזומורפיזם אם מוסיפים לנתונים הנ"ל את סדרי מרכזי החבורות.

3. **משפט 2**: יהיו $p<q$ ראשוניים ו-α,β שלמים חיוביים. תהי G חבורה מסדר $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$ שכל תת-חבורת סילו שלה הינה ציקלית. תהיינה $P\in Syl_p(G),Q\in Syl_q(G)$. אזי:

   א. $n_q=1$ ו-

   א.1. אם G נילפוטנטית, אזי $n_p=1$.

   א.2. אם G אינה נילפוטנטית, אזי $n_p=q^{\beta}$.

   ב. יהי γ שלם אי שלילי כך ש-$|Aut(Q)|\,\|\,p^{\gamma}$. נסמן $i=\min\{\alpha,\gamma\}+1$ אזי קיימים i טיפוסי איזומורפיזם אפשריים עבור G. ביתר פירוט: קיימות i חבורות לא איזומורפיות, $G_1,\ldots,G_i$ המקיימות:

   ב.1. G_s מקיימת את הנחות המשפט לכל $1\le s\le i$.

   ב.2. קיים $1\le j\le i$ יחיד שעבורו $G\cong G_j$.

   ב.3. לכל $1\le s\le i$ מתקיים $G\cong G_s$ אם ורק אם $|Z(G)|=|Z(G_s)|$.

נשים לב כי על פי הנחות משפט זה, תת-חבורות הסילו איזומורפיות זו לזו בכל טיפוסי האיזומורפיזם וכי מספרי הסילו מפרידים בין החבורות הנילפוטנטיות לחבורות שאינן נילפוטנטיות.

<u>תוצאה ממשפט 2</u>: תחת הנחות משפט 2 ובסימוניו, טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-ידי טיפוסי הסילו שלה, ומספרי הסילו אם ורק אם $i \in \{1,2\}$. אם $i=1$ אזי G בהכרח נילפוטנטית, ואם $i=2$ יש שני טיפוסי איזומורפיזם אפשריים עבור G, האחד נילפוטנטי והשני לא, שניתן להבחין ביניהם על פי הערך של n_p.

משפט 2 מספק, אם כן, דוגמאות לכך שטיפוסי ומספרי הסילו של חבורה אינם קובעים באופן יחיד את טיפוס האיזומורפיזם שלה. הוכחה אחרת לטענה זו השגנו באמצעות בניה המנצלת תכונות של מכפלות ישרות כדי לבנות חבורות לא איזומורפיות שיש להן תת-חבורות סילו איזומורפיות ומספרי סילו תואמים זהים, כמכפלות ישרות של גורמים שיש להם תת-חבורות סילו איזומורפיות אך מספרי סילו שונים. דוגמה קונקרטית של הבניה מוצגת בתת-פרק 4.3.

שאלה טבעית שעולה ממשפט 2 היא: באילו מקרים, טיפוסי הסילו בצירוף מספרי הסילו ובצירוף טיפוס האיזומורפיזם של המרכז מספיקים כדי לאפיין את טיפוס האיזומורפיזם של G. ניתוח מפורט של כל טיפוסי האיזומורפיזם השונים של חבורות מסדר 24, שנציג בתת-פרק 4.4, מספק דוגמאות לכך שידיעת טיפוסי הסילו, מספרי הסילו, וטיפוס האיזומורפיזם של המרכז של G אינם מספיקים כדי לקבוע באופן יחיד את טיפוס האיזומורפיזם של G. ננתח את טיפוסי ומספרי הסילו ואת מרכזי כל החבורות מסדר 24 ונציג שתי דוגמאות נגד המבוססות על צמדי חבורות מסדר 24 שאינן איזומורפיות ואשר תת-חבורות הסילו שלהן איזומורפיות, מספרי הסילו זהים ומרכזי החבורות שווי סדר או איזומורפיים.

במקביל ובנוסף לבחינה התיאורטית, נעזרנו בתוכנת GAP ובספרית SmallGroups שלה שמספקת יכולת לעבוד עם כל חבורה עד סדר 2000 כולל (למעט סדר 1536) כדי לחקור היבטים שונים של שאלת המחקר. כתבנו תוכנה ייעודית שמאפשרת לבדוק צמדי חבורות לא איזומורפיות בעלות טיפוסי סילו ומספרי סילו זהים, תחת תנאים משתנים (ציקליות תת-חבורות הסילו, שוויון של סדר המרכז, איזומורפיזם של המרכז וכדי) וכן תוכנה שמונה את מספר טיפוסי האיזומורפיזם השונים לחבורות העונות על תנאים מסוימים.

ריצות ה-GAP כיוונו אותנו אל דוגמאות נגד להשערות שהעלינו, ולהשערות חילופיות. הן שימשו גם ככלי לבדיקה ואימות בלתי תלויים של משפטים שהוכחנו. האלגוריתם המרכזי יוצג בפרק 5.

נתאר להלן את מבנה העבודה :

פרק 2 מסכם חומר רקע רלוונטי. בתת-פרק 2.1 יוצגו מושגים בסיסיים וסימונים אשר בשימוש בעבודה זו. תת פרק 2.2 כולל סיכום מתומצת של משפטי סילו והמושגים הנלווים אליהם, ועובדות יסודיות בנוגע לחבורות נילפוטנטית ולמכפלות ישרות. תת פרק 2.2 מסכם תכונות רלוונטיות של אוטומורפיזמים של חבורה ציקלית ותת פרק 2.3 עוסק בחבורות Z.

הרעיון שתכונות שונות של תת-חבורות סילו של חבורה G מטילות אילוצים משמעותיים על המבנה של G, כלומר על טיפוס האיזומורפיזם של G, הוא רעיון ותיק מאוד שמלווה את המחקר בחבורות סופיות כמעט מראשיתו. פרק 3 יתמקד בסקירת תוצאות מן הספרות, שקרובות במיוחד לשאלת המחקר של העבודה.

פרק 4 פורש את התוצאות התאורטיות שהושגו בעבודה זו.

בתת-פרק 4.1 נוכיח את משפט 1 שמאפיין את טיפוס האיזומורפיזם שלחבורה נילפוטנטית באמצעות טיפוסי הסילו שלה.

בתת-פרק 4.2 ננתח את טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות-Z מסדר $p^{\alpha}q^{\beta}$ ובפרט נוכיח את משפט 2.

בתת-פרק 4.3 נציג בניה של חבורות לא איזומורפיות שיש להן אותם טיפוסי ומספרי סילו, המבוססת על מכפלות ישרות.

בתת-פרק 4.4 נציג ניתוח של כל טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות מסדר 24 ונדון בהשלכותיו על שאלת המחקר שלנו.

בפרק 5 נציג את אופן השימוש בתוכנת GAP ללימוד שאלת המחקר שלנו. נציג את האלגוריתם המרכזי שבו השתמשנו.

פרק 6 מסכם את העבודה ומציע רעיונות למחקר עתידי בנושא.

2. חומר רקע

2.1. מושגים בסיסיים וסימונים

בתת-פרק זה נציג מושגי יסוד מתורת החבורות הנזכרים ואת הסימונים שמייצגים אותם.

2.1.1. מושגים רלוונטיים בתורת המספרים

מושג	הגדרה
חזקה מקסימלית של מחלק	יהיו $1\le\alpha,n$ שלמים ו-$p>1$ שלם. נסמן $p^{\alpha}\parallel n$ אם ורק אם $p^{\alpha}\mid n$ ו-$p^{\alpha+1}\nmid n$, כלומר ש α הינו המעריך המקסימלי של p המחלק את n.
פירוק ראשוני מקובץ של מספר טבעי גדול מ-1	יהי $n\ge 2$ מספר שלם. פירוק ראשוני מקובץ של n היא הצגה שלו כמכפלת החזקות הראשוניות המקסימליות הלא טריוויאליות שמחלקות אותו. ממשפט הפירוק הראשוני הצגה זו יחידה עד כדי סדר הגורמים.

2.1.2. מושגים בסיסיים בתורת החבורות

מושג	הגדרה
איבר- p	יהי p ראשוני ותהי G חבורה. $g\in G$ יקרא איבר- p אם סדרו הינו חזקה של- p.
חבורת- p	יהי p ראשוני. G תיקרא חבורת- p אם כל איבר בה הינו איבר- p.
המרכֵּז (Centralizer) של איבר x	תהי G חבורה ויהי x איבר, אזי המרכֵּז של x הוא $C_G(x)=\{g\in G\mid gxg^{-1}=x\}=\{g\in G\mid gx=xg\}$, כלומר קבוצת האיברים ב- G שמתחלפים עם x.
המרכֵּז של תת-חבורה H בתת-חבורה K	תהי G חבורה ותהיינה $K,H\le G$, אזי המרכֵּז של H ב- K הוא: $C_K(H)=\{k\in K\mid \forall h\in H: kh=hk\}$, כלומר קבוצת האיברים ב- K שמתחלפים עם כל איבר ב H.
המנרמל (Normalizer) של תת-חבורה H בG	תהי G חבורה ותהי H תת-חבורה, אזי המנרמל של H ב- G מוגדר ע"י: $N_G(H)=\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\}$.
המרְכָּז (Center) של חבורה	תהי G חבורה, אזי המרְכָּז של G הוא $Z(G)=\{z\in G\mid \forall g\in G: zg=gz\}$, כלומר קבוצת האיברים ב- G שמתחלפים עם כל איבר ב- G.

הגדרה	מושג
תהיינה G,H חבורות. הומומורפיזם מ-G ל-H הוא פונקציה $\phi:G\to H$ כך ש: $\forall x,y\in G:\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.	**הומומורפיזם**
הומומורפיזם חד-חד ערכי ועל ϕ מחבורה G לעצמה נקרא אוטומורפיזם.	**אוטומורפיזם**
תהי G חבורה ותהי $N\lhd G$. תהי G/N חבורת המנה, אזי נגדיר את ההומומורפיזם הקנוני מ-G ל-G/N להיות הפונקציה $\rho:G\to G/N$ כך ש- $\forall g\in G:\rho(g)=gN$.	**ההומומורפיזם הקנוני**
תהי G חבורה ותהי $H\le G$. H היא תת חבורה קרקטריסטית ב-G, אם לכל אוטומורפיזם $\alpha\in Aut(G)$ מתקיים $H^{\alpha}=H$.	**תת חבורה קרקטריסטית**
תהי G חבורה. אם $A,B,C\le G$ כך ש-$A\subseteq B$, אזי $B\cap(AC)=A(C\cap B)$	**חוק דדקינד**
חבורה מוגדרת **לא** פריקה אם **לא** קיימות שתי תת-חבורות ממש H,K של G כך ש-$G=H\times K$.	**חבורה לא פריקה** **(indecomposable)**

הערות:

1. אם H נורמלית ב-G, אזי גם המרכז של H ב-G הינו תת חבורה נורמלית ב-G.
2. המנרמל כולל תמיד את H ו-H נורמלית ב-G אם"ם $N_G(H)=G$. כמו-כן, כל תת חבורה K של $N_G(H)$ פועלת על H בהצמדה וגרעין הפעולה הוא $C_K(H)$.
3. המרְכָּז של חבורה הינו תת-חבורה נורמלית ואבלית של G.
4. המרְכָּז של חבורה אבלית G הינו כל G.
5. קבוצת האוטומורפיזמים של חבורה G, שתסומן $Aut(G)$, היא חבורה, תחת פעולת הרכבת הפונקציות.
6. ההומומורפיזם הקנוני הינו הומומורפיזם על.
7. אם H תת חבורה קרקטריסטית ב-G, $H\trianglelefteq G$.
8. כל תת חבורה של חבורה ציקלית קרקטריסטית בה.

2.2. משפטי סילו ומסקנותיהם

2.2.1. משפטי סילו

משפטי סילו עוסקים בקיום תת-חבורות p מקסימליות ותכונותיהן.

הגדרה 2.1 תת-חבורה סילו-p

תהי G חבורה מסדר n ויהיו p ראשוני ו-α שלם חיובי כך ש-$p^{\alpha} \| n$. אזי תת-חבורה סילו-p של G היא תת-חבורה של G מסדר p^{α}.

מספר תת-חבורות הסילו-p של G מכונה מספר הסילו-p של G ומסומן n_p.

הערה:

על-פי משפט לגרנז', כל איבר בחבורה שסדרה p^{α} הוא איבר p ולכן תת-חבורה סילו-p של G היא בפרט חבורת-p.

משפט 2.2 (משפטי סילו)

יהי p ראשוני המחלק את $|G|$, אזי:

1. קיימת תת-חבורת סילו-p.
2. כל תת-החבורות סילו-p של G צמודות זו לזו.
3. נסמן ב-n_p את מספר תת-חבורות הסילו-p של G (מטענה 1, נובע כי זהו מספר חיובי) ויהיו k שלם ו-α שלם חיובי כך ש-$p^{\alpha} \| n$ ו-$n = p^{\alpha} k$. אזי, $n_p \equiv 1 (\bmod p)$ וכן $n_p \mid k$.
4. לכל חזקה של p המחלקת את $|G|$ (ולאו דווקא החזקה המקסימלית), קיימת תת-חבורה בגודל זה. כמו-כן, כל תת-חבורת-p מוכלת בתת-חבורת סילו-p כלשהי.

הערות:

1. תת-חבורות הסילו-p של חבורה G הינן תת-חבורות-p מסדר מקסימלי וזהו אפיונן בתוך קבוצת תת-חבורות-p של G.
2. לצורך דיונים שונים, נוח להגדיר תת-חבורות סילו גם עבור ראשוניים שאינם מחלקים את סדר החבורה (כלומר לכל ראשוני בלי תנאי נוסף). במקרה זה תת-חבורת סילו-p מוגדרת להיות תת

החבורה הטריוויאלית. כדאי לשים לב שכל ההגדרות והמשפטים תופסים למקרה הזה (קיום, צמידות תת-החבורות, וכדי).

להלן מספר מסקנות בסיסיות ממשפטי סילו :

למה 2.3 תת-חבורת סילו יחידה היא נורמלית

תהי G חבורה ותהי P תת-חבורת סילו-p של G. אזי P נורמלית ב-G אם ורק אם $n_p = 1$

הוכחה : תהי P תת-חבורת סילו-p של G. אזי P היא תת-חבורת סילו-p יחידה אם ורק אם כל תת-החבורות הצמודות של P שוות לה כלומר אם ורק אם P נורמלית ב-G. משייל

□

למה 2.4 תת-חבורת סילו של חיתוכים

תהי G חבורה ותהיינה $N \trianglelefteq G$ ו-$P_G \in Syl_p(G)$. אזי $P_G \cap N \in Syl_p(N)$.

הוכחה : יהי β שלם אי שלילי כך ש-$p^\beta \,\|\, |N|$. מכיוון ש-$P_G \cap N$ היא תת-חבורת-p שמוכלת ב-N, מספיק להוכיח $|P_G \cap N| = p^\beta$. ממשפטי סילו (משפט 2.2) $P_G \cap N$ מוכלת בתת-חבורת סילו-p של N.

תהי P_N תת-חבורת סילו של N שמכילה את $P_G \cap N$. מכיוון ש-P_N היא תת-חבורת-p של G, היא מוכלת בתת-חבורת סילו-p של G ולכן, מכיוון שכל תת-חבורות הסילו-p של G צמודות ב-G, קיים $g \in G$ כך ש-$P_N \le gP_Gg^{-1}$. הכלה זו, בצירוף $P_N \le N$ נותנת :

$$P_N \le \left(gP_Gg^{-1}\right) \cap N =$$

מנורמליות N :

$$g(P_G \cap N)g^{-1}$$

מכאן

$$|P_N| \le \left|g(P_G \cap N)g^{-1}\right| = |P_G \cap N|$$

כלומר $|P_G \cap N| \geq p^\beta$. אבל $P_G \cap N$ תת-חבורת p של N ולכן, ממשפטי סילו, $|P_G \cap N| \leq p^\beta$.

ובצירוף שני האי-שוויונים, $|P_G \cap N| = p^\beta$ כנדרש. משל

□

למה 2.5 איזומורפיזם של תת-חבורות סילו

תהיינה G, H חבורות איזומורפיות ויהי p גורם ראשוני של $|G|$. תהי P_G תת-חבורת סילו-p של G ותהי P_H תת-חבורת סילו-p של H. אזי P_G איזומורפית ל-P_H.

הוכחה: מכך ש-G ו-H איזומורפיות, $|G| = |H|$. מכיוון ש-$|P_H|$ היא החזקה המקסימלית של כל p שמחלקת את $|H|$ ו-$|P_G|$ היא החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $|G|$, נקבל $|P_G| = |P_H|$. נניח כי $\varphi : G \to H$ איזומורפיזם. נתבונן בתמונה של $\varphi(P_G)$ ב-H. מכיוון ש-P_G חבורת-p אזי כל איבר בה הינו איבר-p. מכיוון שאיזומורפיזם משמר סדרי איברים, אזי גם כל איבר ב-$\varphi(P_G)$ הוא איבר-p. מכאן ש-$\varphi(P_G)$ היא חבורת-p. φ חח״ע ועל ולכן $|P_G| = |P_H| = |\varphi(P_G)|$. ממקסימליות סדר תת-חבורת סילו-p של H, נובע $\varphi(P_G)$. מכיוון שכל תת-חבורות הסילו-p של H איזומורפיות, כלומר $\varphi(P_G) \cong P_H$. מכאן, P_G איזומורפית ל-P_H. משל

□

2.2.2. מכפלות ישרות

למה 2.6 הקשר בין תת-חבורת סילו של מכפלה ישרה לבין תת-חבורות הסילו של גורמיה

תהי G חבורה ותהיינה H,K חבורות כך ש- $G=H\times K$. אזי $P\in Syl_p(G)$ אם ורק אם $P=P_K\times P_H$ כאשר $P_K\in Syl_p(K)$ ו- $P_H\in Syl_p(H)$.

<u>הוכחה</u> :

א. תהיינה $P_K\in Syl_p(K)$ ו- $P_H\in Syl_p(H)$. נסמן $P=P_H P_K$. מכיוון ש- $G=H\times K$ מכפלה ישרה, P_H ו- P_K מתחלפות ולכן P היא חבורת- p. בנוסף, $P_H\cap P_K=\{1_G\}$ ולכן, $|P|=|P_K||P_H|$. וזו החזקה המקסימלית של p שמחלקת את $|G|$. מכאן ש- $P\in Syl_p(G)$. מכיוון שכל איבר ב- $P_H\le H$ מתחלף עם כל איבר ב- $P_K\le K$, P_H ו- P_K נורמליות ב- P ולכן, בצירוף הטענות הקודמות, $P=P_H\times P_K$.

ב. תהי $P\in Syl_p(G)$. מלמה 2.4, $P\cap H\in Syl_p(H)$, $P\cap K\in Syl_p(K)$. מכיוון ש- $G=HK$, אזי $H\cap K=\{1_G\}$ ו- $H,K\trianglelefteq G$.

מכך ש- $H\cap K=\{1_G\}$,

$$(P\cap H)\cap(P\cap K)=P\cap(H\cap K)=\{1_G\}.$$

כמו-כן, מכך ש- $H,K\trianglelefteq G$, אזי $(P\cap H)\trianglelefteq P$ ו- $(P\cap K)\trianglelefteq P$.

נותר להוכיח ש- $(P\cap H)(P\cap K)=P$: ברור ש- $(P\cap H)\times(P\cap K)\subseteq P$. בנוסף, מכיוון ש- $|P\cap H\cap K|=1$ נקבל מנוסחת סדר מכפלת תת-חבורות ש-

$$|(P\cap H)(P\cap K)|=|P\cap H||P\cap K|=|P|$$

לכן, $P=P_K\times P_H$ כאשר $P_K=P\cap K$ ו- $P_H=P\cap H$. <u>משי״ל</u>

□

מסקנה 2.7 מספרי הסילו של מכפלה ישרה של צמד חבורות

תהיינה H ו- K חבורות ויהי p ראשוני.

אזי :

$$n_p(H\times K)=n_p(H)n_p(K)$$

הוכחה : מפרטי ההוכחה של למה 2.6 נובע שקיימת התאמה חד-חד ערכית בין חבורות סילו- p של G לזוגות סדורים (P_K,P_H) כאשר $P_K\in Syl_p(K)$ ו- $P_H\in Syl_p(H)$ ומכאן הטענה.

□

משהוכחנו את הלמה עבור צמד חבורות, נוכל להכליל אותה באינדוקציה על מכפלה ישרה של סדרת חבורות ללא הגבלת אורך הסדרה :

למה 2.8 מספרי הסילו של מכפלה ישרה של סדרת חבורות (הכללה של מסקנה 2.7)

תהי G חבורה ותהיינה $G_1,\dots,G_n$ חבורות כך ש- $n\geq 2$ ו- $G=\prod_{i=1}^{n}G_i$ מכפלה ישרה, אזי כל תת-חבורת סילו- p של G היא מכפלה של תת-חבורות סילו- p של G_i ולהיפך. בפרט מתקיים

$$n_p\left(\prod_{i=1}^{n}G_i\right)=\prod_{i=1}^{n}n_p(G_i)\,.$$

הוכחה : באינדוקציה על n , כאשר בסיס האינדוקציה $n=2$ הוכח במסקנה 2.7.

□

2.2.3. חבורות נילפוטנטיות

בסעיף זה נציג את ההגדרה של חבורה נילפוטנטית ותכונות רלוונטיות של חבורות מסוג זה.

לצורך הגדרת חבורה נילפוטנטית נזדקק למושגים הבאים.

הגדרה 2.9 קומוטטור

תהי G חבורה ויהיו x,y איברים ב-G. הקומוטטור $[x,y]$ הוא האיבר $xyx^{-1}y^{-1}$.

הגדרה 2.10 תת-חבורת הקומוטטורים

תהיינה G,H חבורות. תת-חבורת הקומוטטורים, המסומנת ע״י $[G,H]$ היא תת-החבורה הנוצרת ע״י כל הקומוטטורים:

$$[G,H]=\langle [g,h] \mid g\in G, h\in H\rangle .$$

הערה: $[G,G]$ היא תת-החבורה הנורמלית הקטנה ביותר כך שהמנה $G/[G,G]$ היא אבלית.

הגדרה 2.11 סדרה מרכזית יורדת

תהי G חבורה. אזי הסדרה המרכזית היורדת של G מוגדרת להיות סדרת תת-החבורות של G המוגדרות ע״י:

$$G=G^{(1)}\geq G^{(2)}=\left[G^{(1)},G\right]\geq G^{(3)}=\left[G^{(2)},G\right]\geq ,\ldots,\geq G^{(n)}=\left[G^{(n-1)},G\right] .$$

הגדרה 2.12 חבורה נילפוטנטית-הגדרה על פי סדרה מרכזית יורדת

חבורה G היא נילפוטנטית אם הסדרה המרכזית **היורדת** שלה מסתיימת ב-1, כלומר שקיים $n\geq 1$ כך ש-

$$G^{(n)}=\left[G^{(n-1)},G\right]=\{1_G\} .$$

הגדרה 2.13 סדרה מרכזית עולה

תהי G חבורה. אזי הסדרה המרכזית העולה של G, המסומנת $Z_n(G)$ עבור $n\geq 0$, מוגדרת להיות סדרת תת-חבורות המוגדרות ע״י:

א. $Z_0(G)=\{1_G\}$.

ב. לכל $i\geq 1$: $Z_i(G)/Z_{i-1}(G)=Z(G/Z_{i-1}(G))$.

המשפט הבא , שלא נוכיח, מאפשר לנו לאפיין את תכונת הנילפוטנטיות של חבורה G באמצעות הסדרה המרכזית העולה של G.

משפט 2.14 הקשר בין סדרה מרכזית עולה לסדרה מרכזית יורדת

תהי G חבורה. אזי מתקיים :

א. אם $Z_n(G)=G$ אזי לכל $0\le i\le n$, מתקיים : $G^{(i+1)}\le Z_{n-i}(G)$.

ב. $Z_n(G)=G$ אם ורק אם $G^{(n+1)}=1$.

מסקנה 2.15 חבורה נילפוטנטית-הגדרה על פי סדרה מרכזית עולה

חבורה G היא נילפוטנטית אם ורק אם הסדרה המרכזית **העולה** שלה מסתיימת ב- G, כלומר שקיים $n\ge 0$ כך ש- $Z_n(G)=G$.

משפט 2.16 כל חבורה אבלית היא בפרט נילפוטנטית

אם G חבורה אבלית, אזי G היא נילפוטנטית.

הוכחה : $Z_1(G)$ האיבר השני בסדרה המרכזית העולה של G (הגדרה 2.13) מקיים

$$Z_1(G)=Z_1(G)/Z_0(G)=Z(G/Z_0(G))=Z(G)$$

אך מאחר ו- G אבלית, $Z(G)=G$ ולכן, ממסקנה 2.15, G נילפוטנטית. מש״ל

□

המשפט הבא מאפיין נילפוטנטיות של חבורות באמצעות תת-חבורות סילו שלהן, ולכן רלוונטי לדיון בשאלת המחקר של העבודה.

משפט 2.17 תנאים שקולים לחבורה נילפוטנטית

תהי G חבורה. אזי התנאים הבאים שקולים :

1. G נילפוטנטית.
2. כל תת-חבורת סילו של G נורמלית בה.

3. G היא מכפלה ישרה של כל תת חבורות הסילו של G.

לשם הוכחת משפט זה, נידרש ללמות הבאות:

למה 2.18 מנרמל של תת-חבורת סילו

תהי G חבורה ותהי P תת-חבורת סילו-p של G, אזי $N_G(N_G(P))=N_G(P)$.

<u>הוכחה</u>: מהגדרת מנרמל של A (תת-חבורה כלשהי), $A\le N_G(A)$ ולכן, $N_G(P)\le N_G(N_G(P))$. נותר להראות ש-$N_G(N_G(P))\le N_G(P)$.

מכיוון ש-$P\in Syl_p(P)$ אזי P היא חבורת-p של G מסדר מקסימלי ולכן, $P\le N_G(P)$ גורר $P\in Syl_p(N_G(P))$.

יהי $g\in N_G(N_G(P))$ כלשהו. מ- $P\le N_G(P)$ ומהגדרת מנרמל,

$$gPg^{-1}\le gN_G(P)g^{-1}=N_G(P).$$

$\left|gPg^{-1}\right|=|P|$ ולכן $gPg^{-1}\le N_G(P)$ גורר $gPg^{-1}\in Syl_p(N_G(P))$. אך ממשפטי סילו, כל תת-חבורות הסילו-p של $N_G(P)$ צמודות זו לזו ולכן קיים $h\in N_G(P)$ כלשהו כך ש-$gPg^{-1}=hPh^{-1}$. מכיוון ש-$h\in N_G(P)$, מתקיים $hPh^{-1}=P$, כלומר קיבלנו $gPg^{-1}=P$ ומכאן ש-$g\in N_G(P)$. מכאן ש-$N_G(N_G(P))\le N_G(P)$ ולכן קיבלנו ש-$N_G(N_G(P))=N_G(P)$. <u>מש"ל</u>

□

למה 2.19 הכלה ממש של תת-חבורה במנרמל

תהי G חבורה נילפוטנטית. אם $H<G$ אז $H<N_G(H)$.

<u>הוכחה</u>: תהי:

$$G=G^{(1)}\ge G^{(2)}=\left[G^{(1)},G\right]\ge G^{(3)}=\left[G^{(2)},G\right]\ge,\ldots,\ge G^{(n)}=\left[G^{(n-1)},G\right]$$

הסדרה המרכזית היורדת של G.

אזי $1=G^{(n)}\le H$, אך $G=G^{(1)}\not\le H$. על כן נמצא את ה-i המינימלי עבורו $G^{(i)}\le H$.

אבל $G^{(i-1)} \not\leq H$ וכן

$$\left[G^{(i-1)}, H\right] \leq \left[G^{(i-1)}, G\right] = G^{(i)} \leq H$$

ולכן, עבור $h \in H$, $x \in G^{(i-1)}$, $xhx^{-1}h^{-1} = [x,h] \in H$.

לכן, מתכונות תת-חבורה, $xhx^{-1} \in H$. מכאן נובע ש-

$$H^x = H \text{ לכל } x \in G^{(i-1)},$$

ולכן הוכחנו $G^{(i-1)} \leq N_G(H)$. מכיוון ש- $G^{(i-1)} \not\leq H$, נקבל $H < N_G(H)$. משי"ל

□

למה 2.20 לחבורות-p יש מרכז לא טריוויאלי

יהי p מספר ראשוני ותהי G חבורת - p לא טריוויאלית, $|G| = p^n$ עבור $n > 1$ טבעי כלשהו. אזי $Z(G)$ לא טריוויאלי.

<u>הוכחה</u>: $|Z(G)|$ הוא מספר מחלקות הצמידות של G שגודלן 1. תהיינה $C_1,\ldots,C_k$ כל מחלקות הצמידות של G שגודלן גדול מ-1. גודל של מחלקת צמידות מחלק את גודל החבורה ולכן, לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים $|C_i| = p^{\alpha_i}$ עבור שלם חיובי α_i. מכיוון שקבוצת כל מחלקות הצמידות של G היא חלוקה של G נקבל:

$$|Z(G)| = |G| - \sum_{i=1}^{k} |C_i| = p^n - \sum_{i=1}^{k} p^{\alpha_i}.$$

אגף ימין מתחלק ב- p ולכן גם אגף שמאל. בפרט, $|Z(G)| > 1$.

□

למה 2.21 חבורות p הן חבורות נילפוטנטיות

יהי p מספר ראשוני ותהי G חבורת - p **סופית**, $|G| = p^n$ עבור n טבעי כלשהו. אזי G היא חבורה נילפוטנטית.

הוכחה : נניח בשלילה ש- G אינה נילפוטנטית, לכן (מסקנה 2.15) לכל $i \geq 1$, $Z_{i-1}(G) < G$.

מאחר ו- G היא חבורת - p , אזי גם חבורת המנה $G/Z_{i-1}(G)$ היא חבורת - p ומכיוון ש- $Z_{i-1}(G) \neq G$, אזי $G/Z_{i-1}(G) \ncong \{1\}$. מכאן, מלמה 2.20, גם מרכז החבורה $G/Z_{i-1}(G) \ncong \{1\}$ אינו טריוויאלי, ולכן, מן התכונה $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$, שמגדירה סדרה מרכזית, נובע $|Z_i(G)/Z_{i-1}(G)| > 1$.

ולכן $|Z_i(G)| > |Z_{i-1}(G)|$, כלומר $Z_{i-1}(G)$ תת-חבורה ממש של $Z_i(G)$. קיבלנו סדרה אינסופית עולה ממש של טבעיים, בסתירה לכך שהחבורה סופית. משי"ל

□

למה 2.22 מכפלה ישרה של תת-חבורות קומוטטורים

תהיינה G, H, K חבורות כך ש- $G = H \times K$.

1. יהיו $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$ איברים כך ש- $g_1 = (h_1, k_1), g_2 = (h_2, k_2)$. אזי
$$[g_1, g_2] = [(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = ([h_1, h_2], [k_1, k_2])$$
2. אם $A \leq G$, $A = H_1 \times K_1$ כאשר $H_1 \leq H$ ו- $K_1 \leq K$, אזי $[G, A] = [H, H_1] \times [K, K_1]$.

הוכחה :

1. מהגדרת הקומוטטור,
$$[g_1, g_2] = [(h_1, k_1), (h_2, k_2)] = (h_1, k_1)(h_2, k_2)(h_1, k_1)^{-1}(h_2, k_2)^{-1}$$
מתכונות המכפלה הישרה נקבל :
$$(h_1, k_1)(h_2, k_2)(h_1^{-1}, k_1^{-1})(h_2^{-1}, k_2^{-1}) =$$
$$(h_1 h_2, k_1 k_2)(h_1^{-1} h_2^{-1}, k_1^{-1} k_2^{-1}) = (h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}, k_1 k_2 k_1^{-1} k_2^{-1}) = ([h_1, h_2], [k_1, k_2])$$
2. מהגדרת תת-חבורת הקומוטטורים :
$$[G, A] = \langle [g, a] \mid g \in G, a \in A \rangle = \langle ([h, h_1], [k, k_1]) \mid h \in H_1, h_1 \in H_1, k \in K, k_1 \in K_1 \rangle =$$
מהגדרת המכפלה הישרה,
$$\langle [h, h_1] \mid h \in H, h_1 \in H_1 \rangle \times \langle [k, k_1] \mid k \in K, k_1 \in K_1 \rangle =$$
כלומר, מהגדרת תת-חבורת הקומוטטורים,

$$[H,H_1]\times[K,K_1]=[G,A]$$

משי"ל

□

למה 2.23 מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטית היא נילפוטנטית

תהיינה $G_1,\ldots,G_n$ חבורות נילפוטנטיות. אזי $G_1\times\cdots\times G_n$ נילפוטנטית.

הוכחה: די להראות כי אם G_1,G_2 נילפוטנטיות, אזי גם $G=G_1\times G_2$ נילפוטנטית.

נעשה שימוש בסדרות המרכזיות היורדות של שני הגורמים הישרים ושל המכפלה המלאה. מהגדרה 2.11:

$$G=G^{(1)}\geq G^{(2)}=\left[G^{(1)},G\right]\geq G^{(3)}=\left[G^{(2)},G\right]\geq,\ldots,\geq G^{(n)}=\left[G^{(n-1)},G\right].$$

$$G_1=G_1^{(1)}\geq G_1^{(2)}\geq\ldots\geq G_1^{(n)},$$

$$G_2=G_2^{(1)}\geq G_2^{(2)}\geq\ldots\geq G_2^{(n)}.$$

תחילה נוכיח כי לכל חבורה G (לאו דווקא נילפוטנטית) ולכל $1\leq i$ מתקיים $G^{(i)}=G_1^{(i)}\times G_2^{(i)}$. נוכיח זאת באינדוקציה על i:

- בסיס: $i=1$. על-פי הגדרה 2.11, לכל חבורה H, $H=H^{(1)}$ ולכן $G=G_1\times G_2$.
- נניח כי הטענה נכונה עבור $i=k$, כלומר $G^{(k)}=G_1^{(k)}\times G_2^{(k)}$.
- נראה כי הטענה נכונה עבור $i=k+1$:

מהגדרת הסדרה המרכזית היורדת,

$$G^{(k+1)}=\left[G^{(k)},G\right]=\left[G^{(k)},G_1\times G_2\right].$$

אך מהנחת האינדוקציה,

$$\left[G^{(k)},G_1\times G_2\right]=\left[G_1^{(k)}\times G_2^{(k)},G_1\times G_2\right]$$

ולכן, מכיוון ש-$G_1^{(k)}\leq G_1$ וגם $G_2^{(k)}\leq G_2$, נקבל מלמה 2.22,

$$\left[G^{(k)},G_1\times G_2\right]=\left[G_1^{(k)},G_1\right]\times\left[G_2^{(k)},G_2\right]$$

ומהגדרת הסדרה המרכזית היורדת קיבלנו

$$\left[G_1^{(k)},G_1\right]\times\left[G_2^{(k)},G_2\right]=G_1^{(k+1)}\times G_2^{(k+1)}$$

כלומר שלכל $i\geq 1$ מתקיים $G^{(i)}=G_1^{(i)}\times G_2^{(i)}$, כנדרש.

תהיינה G_1,G_2 חבורות נילפוטנטיות. נוכיח שגם $G=G_1\times G_2$ נילפוטנטית. מספיק להוכיח שקיים

$n\geq 1$ כך ש- $\left[G^{(n)},G\right]=1$. בהסתמך על הטענה הראשונה שהוכחנו, מספיק להראות שקיים n כך ש-

$G^{(n)}=G_1^{(n)}\times G_2^{(n)}$. מכיוון ש- G_1,G_2 נילפוטנטיות, אזי מהגדרת נילפוטנטיות קיימים $n_1,n_2\geq 1$ כך ש-

$$\left[G_1^{(n_1)},G_1\right]=\left[G_2^{(n_2)},G_2\right]=1.$$

ולכן $n=\max(n_1,n_2)$ מקיים את הנדרש.

□

הוכחת משפט 2.17:

- $1\Rightarrow 2$: יהי p ראשוני כלשהו ויהי n טבעי כלשהו. תהי G חבורה נילפוטנטית כך ש- $p^n\,||\,|G|$. תהי $P\in Syl_p(G)$. נסמן $H=N_G(P)$. מלמה 2.18, $H=N_G(H)$. לכן מלמה 2.19 $H=G$. קיבלנו ש $N_G(P)=G$, כלומר, $P\trianglelefteq G$.
- $2\Rightarrow 3$: יהי

$$|G|=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k},$$

פירוק ראשוני מקובץ של סדר החבורה. לכל $1\leq i\leq k$ נסמן ב- P_i את תת-חבורת סילו-p_i הנורמלית והיחידה (על פי הנחה 2) של G. כעת נראה באינדוקציה שלכל $1\leq j\leq k$:

$$P_1P_2\cdots P_j\cong P_1\times P_2\times\cdots\times P_j:$$

  - בסיס: $j=1$, מתקיים באופן ברור.
  - נניח כי הטענה נכונה עבור $j=m<k$, ונסמן:

$$N=P_1P_2\cdots P_m\cong P_1\times P_2\times\cdots\times P_m.$$

נשים לב כי $\gcd(|N|,|P_{m+1}|)=1$. מהנחה 2, כל תת-חבורת סילו של G נורמלית בה ועל כן גם המכפלה $N \trianglelefteq G$. כמו-כן, $P_{m+1} \trianglelefteq G$. בנוסף, מכיוון ש-$\gcd(|N|,|P_{m+1}|)=1$, נקבל $N \cap P_{m+1} = \{1_G\}$.

מכאן ש-NP_{m+1} היא מכפלה ישרה. קיבלנו ש-

$$NP_{m+1} \cong N \times P_{m+1} \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_{m+1}$$

בפרט, מכיוון ש-$P_1P_2 \cdots P_k = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$ נקבל:

$$|P_1P_2 \cdots P_k| = |P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k| = |P_1||P_2| \cdots |P_k| = |G|$$

ולכן

$$.G = P_1P_2 \cdots P_k \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$$

- $1 \Rightarrow 3$: נניח ש-G היא מכפלה ישרה של כל תת חבורות סילו-p של G. אזי, מלמה 2.21, G היא מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטית ולכן מלמה 2.23, G נילפוטנטית. משייל

□

2.2. אוטומורפיזמים של חבורה ציקלית סופית

יהי n שלם חיובי ונתבונן בחוג $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. חוג זה הוא חבורה חיבורית $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ וחבורת כל היחידות הכפליות שלו היא החבורה $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$. חבורה זו פועלת "בתוך החוג" בהכפלה על $(\mathbb{Z}_n, +_n)$, כחבורת האוטומורפיזמים של $(\mathbb{Z}_n, +_n)$ ולכן אנחנו יכולים לראות כל אוטומורפיזם $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n)$ כאיבר יחיד $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{Z}_n^*$ שממפה איבר $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_n$ ע"י $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi} \cdot_n \boldsymbol{x}$.

יהי m מחלק חיובי של n. המיפוי $\Phi_m: (\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n) \to (\mathbb{Z}_m, +_m, \cdot_m)$

המוגדר ע"י $\forall x \in \mathbb{Z}_n: \Phi_m(x) = x(mod\ m)$

הוא הומומורפיזם של החוג $\mathbb{Z}_n$ על החוג $\mathbb{Z}_m$

ולכן משרה הומומורפיזם על $\boldsymbol{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n) \to \boldsymbol{Aut}(\mathbb{Z}_m, +_m)$

נשים לב כי: $ker(\Phi_m) \cong (\mathbb{Z}_{n/m}, +_{n/m}, \cdot_{n/m})$.

כעת נתייחס למקרה $n = q^k$ כאשר q ראשוני אי זוגי ו k שלם. במקרה זה,

$$\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_{q^k}^* = Q_q \times Q_{q'},$$

כאשר Q_q היא חבורה ציקלית מסדר q^{k-1} (תת-חבורת הסילו-q היחידה של $\mathbb{Z}_{q^k}^*$) ו-$Q_{q'}$ היא חבורה ציקלית מסדר $q-1$. נשים לב שגם $\mathbb{Z}_{q^k}^* = Q_q \times Q_{q'}$ ציקלית.

במקרה זה, עבור כל $m = q^l$ המקיים $l > 0, l \leq k$ נקבל $\Phi_{q^l}(Q_{q'}) \cong Q_{q'}$ מכיוון ש-

$$ker(\Phi_{q^l}) \cap Q_{q'} = \{1_G\}.$$

חומר רקע זה והוכחתו מופיעים בפרק 9.5, טענה 20 של [1].

2.3. חבורות-Z

הגדרה 2.24 חבורת-Z

חבורה תיקרא חבורת-Z אם כל תת-חבורת סילו שלה היא ציקלית.

חבורות-Z הן בחירה טבעית למשפחה של חבורות שמדגימה כיצד טיפוסי האיזומורפיזם של תת חבורות הסילו מגבילים באופן משמעותי את תכונות החבורה, ולכן היא גם מהווה בחירה טבעית למודל שבו ניתן ללמוד את שאלת המחקר שלנו. בסעיף זה נצטט ללא הוכחה שני משפטים מרכזיים העוסקים במבנה של חבורות-Z. ראשית, נגדיר מספר מושגים :

הגדרה 2.25 משלים-p נורמלי

תת-חבורה N של חבורה G תיקרא משלים-p נורמלי אם ורק אם $N \trianglelefteq G$ וגם קיימת $P \in Syl_p(G)$ כך ש-
$NP = G$ ו-$N \cap P = \{1_G\}$.

הגדרה 2.26 חבורה p-נילפוטנטית

חבורה G תיקרא p-נילפוטנטית עבור ראשוני p, אם ורק אם ל-G יש משלים-p נורמלי.

הגדרה 2.27 חבורה מטא-ציקלית

חבורה G תיקרא מטא-ציקלית אם ורק אם קיימת $N \trianglelefteq G$ כך ש-N ו-G/N הינן ציקליות.

משפט 2.28 ([2] , תוצאה 10.24):

תהי G חבורת-Z ויהי p הראשוני הקטן ביותר שמחלק את הסדר של G. אזי $N_G(P) = C_G(P)$ ו-G היא p-נילפוטנטית.

משפט 2.29 ([2], 10.26):

תהי G חבורת-Z. אזי:

א. G פתירה.

ב. G' וגם G/G' ציקליות (ולכן G מטא ציקלית).

ג. G מתפצלת מעל G' ו-G' היא תת-חבורת Hall[2] של G.

---

[2] תהי G חבורה סופית ותהי $H \leq G$. H תיקרא תת-חבורת Hall אם ורק אם לכל ראשוני p שמחלק את $|G|$, p מחלק בדיוק אחד מהמספרים : $|H|$ והאינדקס של H ב-G.

3. תוצאות מן הספרות שקרובות לשאלת המחקר

הקשר שבין מידע על תת-חבורות של חבורה G לתכונות של G הוא אחד הרעיונות המרכזיים במחקר חבורות וזכה לשיכלולים ועידונים רבים. דוגמה לאחד הכיוונים היותר עמוקים שאליהם פנה רעיון זה הוא המושג "אנליזה מקומית (לוקלית)". תת-חבורה של חבורה תיקרא תת-חבורה p -מקומית אם היא שווה למנרמל של תת-חבורת p לא טריוויאלית כלשהי. "אנליזה לוקלית" של חבורה עוסקת בניתוח האילוצים על המבנה של חבורה G מתוך מידע על תת החבורות ה- p -מקומיות של G, והיא אחת הטכניקות המרכזיות בהוכחת המשפט החשוב ביותר העוסק במיון החבורות הסופיות הפשוטות. במסגרת העבודה הנוכחית לא נוכל לדון בכל המגוון העצום של תוצאות ותיאוריות הקשורות באילוצים שתת חבורות מטילות על החבורה שבה הן משוכנות. נסתפק בסקירה של השערה לגבי מספרי סילו בחבורות פשוטות לא אבליות שדומה באופיה לשאלת המחקר שלנו.

אפיון חבורות פשוטות לא אבליות על ידי מספרי סילו

תהי G חבורה ותהי $\pi(G)$ קבוצת המחלקים הראשוניים של $|G|$. עבור כל מחלק $t\in\pi(G)$ נסמן ב- $n_t'(G)$ את **סדר** המנרמל של תת-חבורת הסילו- t של G (בשונה ממספר הסילו כפי שהוגדר בעבודה זו, שהוא **האינדקס** של המנרמל), ונסמן: $n(G)=\{n_t'(G)\mid t\in\pi(G)\}$.

נשים לב שמידיעת $n(G)$ ניתן לחשב גם את מספרי הסילו באופן הבא: מ- $n_t'(G)$ ניתן לחשב את החזקה המקסימלית של t שמחלקת את $|G|$ (שהיא החזקה המקסימלית של t שמחלקת את $n_t'(G)$). לכן ניתן לחשב את $|G|$ ומכאן שמספר הסילו t הוא $n_t(G)=|G|/n_t'(G)$. מכאן שידיעת הקבוצה $n(G)$ שקולה לידיעת $|G|$ וכל מספרי הסילו של G.

הגדרה 3.1: חבורה $n(G)$ -מאופיינת

חבורה G תיקרא $n(G)$ -מאופיינת(characterizable), אם טיפוס האיזומורפיזם שלה נקבע באופן יחיד על ידי $n(G)$.

הערה: נשים לב שבפרט, טיפוס האיזומורפיזם של חבורה G שהיא $n(G)$ -מאופיינת, נקבע באופן יחיד על ידי מספרי הסילו וטיפוסי הסילו של G, ולכן, השאלה הבאה קשורה ישירות לשאלת המחקר שלנו:

שאלה 3.2: האם חבורה פשוטה לא אבלית הינה $n(G)$ -מאופיינת?

לשם הצגת טיפוסי החבורות עבורם ניתנה תשובה לשאלה זו נסמן את הסימונים הבאים :

יהיו $n \geq 3$ טבעי, p ראשוני, k טבעי ו- $q = p^k$.

שאלה 3.2 נשאלה במקור ע״י Bi ב-[3]. תשובות חיוביות הוכחו לטיפוסי החבורות הבאים : $L_2\left(p^k\right)$ (ב-[3]), $L_n(q)$ (ב-[4]), $S_4(q)$ (ב- [5]), ה-Alternating Simple Groups (ב-[6]), $U_n(q)$ (ב-[7]), החבורות הפשוטות הספורדיות (ב- [8]), חבורות מתיו (ב-[9]), $D_n\left(p^k\right)$ (ב- [10]), חבורות $D_{n+1}(q)$ (ב- [11]) וחבורות $B_n(q), C_n(q)$ עבור $n=2$ או $q \not\equiv \pm 1 (\mathrm{mod} 8)$ (ב- [11]).

N. Ahanjideh and A. Iranmanesh מצאו ב- [11] את הדוגמאות הראשונות בהן התשובה לשאלה 3.2 שלילית. דוגמאות כאלה מופיעות בחבורות פשוטות ולא אבליות מטיפוס לי מן המשפחות $B_n(q), C_n(q)$ ו- $D_n(q)$ כאשר $n \geq 3$ וגם $q \equiv \pm 1 (\mathrm{mod} 8)$.

4. תוצאות

בפרק זה נציג את התוצאות שקבלנו לגבי השאלה המרכזית בעבודה זו: אילו מגבלות על טיפוס האיזומורפיזם של חבורה G ניתן להסיק מידיעת טיפוסי הסילו של G ומספרי הסילו שלה. חקרנו את השאלה הנ״ל עבור המקרים הבאים:

1. G **חבורה נילפוטנטית**. במקרה זה טיפוסי הסילו של G ומספרי הסילו שלה קובעים בצורה יחידה את טיפוס האיזומורפיזם של G, וטענה זו נובעת מיידית מתוצאה קלאסית ידועה על אפיון חבורות נילפוטנטיות. מקרה זה נדון בתת-פרק 4.1.
2. G **היא חבורת Z מסדר** $p^{\alpha}q^{\beta}$, כאשר $p\neq q$ ראשוניים ו-$\alpha,\beta\geq 1$ שלמים כלשהם. משפט 2 מציג ניתוח מלא של מקרה זה, כלומר אפיון של כל טיפוסי האיזומורפיזם האפשריים ומנייתם. בפרט, נראה שסדר המרכז של G, כלומר $|Z(G)|$, קובע באופן יחיד את טיפוס האיזומורפיזם. מקרה זה מטופל בתת-פרק 4.2.
3. בתת-פרק 4.3 ננתח דוגמאות שבהן G היא **מכפלה ישרה** של מספר תת-חבורות. הניתוח מראה כיצד המבנה של מכפלה ישרה מאפשר לבנות חבורות לא איזומורפיות שיש להן חבורות סילו איזומורפיות עם מספרי סילו זהים. מסקנה מתבקשת מדוגמאות אלה היא שלצורך דיון עתידי נוסף בשאלה המרכזית של העבודה הגיוני להוסיף את התנאי ש- G היא חבורה לא פריקה.
4. G **מסדר 24**. בתת-פרק 4.4 נציג את כל טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות מסדר 24, ונזהה ביניהן צמדי טיפוסי איזומורפיזם שונים שבהן תת-חבורות הסילו איזומורפיות ומספרי הסילו שווים. בין הצמדים הללו נמצא זוג שעבורו אפילו מרכזי החבורות איזומורפיים. דוגמה זו חשובה בהקשר לדיון בתת-פרק 4.2 (השוו למשפט 2), כיוון שהיא מראה שבמקרה הכללי לא ניתן לקבוע את טיפוס האיזומורפיזם של G באופן יחיד על פי צירוף טיפוסי הסילו, מספרי הסילו וטיפוס האיזומורפיזם של המרכז.

4.1. חבורות נילפוטנטיות

הטענה שטיפוס האיזומורפיזם של חבורה נילפוטנטית נקבע באופן יחיד על ידי טיפוסי הסילו שלה נשענת על האפיון של חבורה נילפוטנטית כמכפלה ישרה של כל תת-חבורות הסילו שלה (משפט 2.17).

משפט 1. קביעת טיפוס האיזומורפיזם של חבורות נילפוטנטיות על פי מספרי וטיפוסי הסילו

תהיינה G,H שתי חבורות ונתון שכל מספרי הסילו של-G שווים ל-1. אזי G ו- H איזומורפיות אם ורק אם כל מספרי הסילו של- H שווים ל-1 ולכל ראשוני p תת-חבורת הסילו-p של G איזומורפית לתת-חבורת הסילו-p של H.

הוכחה : ראשית, נשים לב לכך שממשפט 2.17, חבורה G היא נילפוטנטית אם ורק אם היא מכפלה ישרה של תת-חבורות הסילו-p שלה וכן אם ורק אם כל תת-חבורת סילו שלה נורמלית בה (כלומר בפרט כל מספרי הסילו שווים ל-1). עכשיו נוכיח את שני כיווני הטענה.

1. נניח G ו- H איזומורפיות. מלמה 2.5, לכל ראשוני p תת-חבורת הסילו-p של G איזומורפית לתת-חבורת הסילו-p של H. כמו-כן, מכך ש- G נילפוטנטית ואיזומורפית ל- H, אזי גם H נילפוטנטית ולכן כל מספרי הסילו של H שווים ל-1.
2. נניח שכל מספרי הסילו של- H שווים ל-1 ולכל ראשוני p תת-חבורת הסילו-p של G איזומורפית לתת-חבורת הסילו-p של H. אם גורמי מכפלות ישרות איזומורפיים בהתאמה אזי גם החבורות איזומורפיות.

מסקנה :

אם G חבורה נילפוטנטית, אזי טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-פי טיפוסי הסילו של G.

בפרט, אם G חבורה אבלית אזי ממשפט 2.16, טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-פי טיפוסי הסילו של G.

4.2. טיפוסי האיזומורפיזם בחבורות Z מסדר $p^{\alpha}q^{\beta}$

בתת-פרק זה נוכיח את משפט 2 שמאפיין את טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות מסדר $p^{\alpha}q^{\beta}$ כאשר $p\neq q$ ראשוניים ו-$\alpha,\beta\geq 1$ שלמים כלשהם ותת-חבורות הסילו ציקליות. בפרט, נוכיח שניתן להבחין בין טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות המקיימות את הדרישות הנ"ל באמצעות סדר מרכז החבורה.

כהכנה להוכחה, נוכיח את הלמות הבאות.

למה 4.1 לאוטומורפיזם של Q שסדרו זר ל- q אין נקודות שבת לא טריוויאליות

יהי q ראשוני אי-זוגי ויהי n שלם חיובי כלשהו. תהי Q חבורה ציקלית מסדר q^n. אם $1_G\neq\alpha\in Aut(Q)$ הוא איבר q', אזי $g^{\alpha}\neq g$ לכל $1_G\neq g\in Q$.

הוכחה :

נוכיח באינדוקציה על $n\geq 1$. נשתמש בייצוג אוטומורפיזם כאיבר $x\in\mathbb{Z}_n^*$, (ראו תת-פרק 2.2).

- בסיס : $n=1$. במקרה זה, $Q_{q'}=\mathbb{Z}_q^*$, וכל $0\neq g\in\mathbb{Z}_q$ מקיים $g\in\mathbb{Z}_q^*$. לכן במקרה זה ברור ש- $x\cdot_q g=g$ אם"ם $x=1$.
- מעבר : נניח כי הטענה מתקיימת עבור $n-1$ ונראה כי היא מתקיימת עבור $n>1$ כללי : יהיו $1\neq x\in Q_{q'}$, $0\neq g\in\mathbb{Z}_{q^n}$ כלשהם. תהי C תת-החבורה הציקלית היחידה של $G=\left(\mathbb{Z}_{q^n},+_{q^n}\right)$ מסדר q^{n-1}. נשים לב ש- $C=\{0,q,2q,\dots,(q^{n-1}-1)q\}$.

נפצל את הדיון למקרים הבאים :

1. $g\in C$: במקרה זה, מכיוון ש-C היא תת-חבורה קרקטריסטית של G, אזי הכפלה ב-x פועלת כאוטומורפיזם של C . הכפלה ב-x אינה אוטומורפיזם הזהות של C מאחר ו- $q\in C$ (כיוון ש- $n>1$), ואם נניח בשלילה ש-x פועל כזהות נקבל $x\cdot_{q^n}q=q$. השוויון האחרון שקול לקיום מספר שלם s כך ש-$x\cdot q=q+s\cdot q^n$ ($\cdot$ מייצג כפל שלמים רגיל), ששקול ל-

$$x=1+s\cdot q^{n-1}.$$

לכן, מכיוון ש-$n > 1$ נקבל תחת ההומומורפיזם $\Phi_q\colon \mathbb{Z}_{q^n} \to \mathbb{Z}_q$ (תת-פרק 2.2), $\Phi_q(x) = 1$,

בסתירה לכך ש- $\Phi_q(Q_{q'}) \cong Q_{q'}$ ו-x אינו איבר היחידה של $Q_{q'}$.

הסדר של המכפלה ב-x כאוטומורפיזם של C מחלק את הסדר שלה כאוטומורפיזם של G שהוא

עצמו מחלק של $q-1$. מכאן שהמכפלה ב-x היא אוטומורפיזם q' לא-טריוויאלי של C.

מכאן ומהנחת האינדוקציה, $x \cdot_{q^n} g \neq g$.

2. $g \notin C$: מכיוון שההומומורפיזם $\Phi_q\colon (\mathbb{Z}_{q^n}, +_{q^n}, \cdot_{q^n}) \to (\mathbb{Z}_q, +_q, \cdot_q)$,

המוגדר ע״י $\forall g \in \mathbb{Z}_{q^n}\colon \Phi_q(x) = g(mod\ q)$ הוא הומומורפיזם על של החוג

שגרעינו $ker(\Phi_q) = (\mathbb{Z}_{q^{n-1}}, +_{q^{n-1}}, \cdot_{q^{n-1}}) \cong C$.

ומכיוון ש- $\Phi_q(Q_{q'}) = \mathbb{Z}_{\boldsymbol{q}}^*$ (מתת-פרק 2.2), נובע כי $\Phi_q(x) \neq 1$ ומכיוון ש-$g \notin C$, נקבל

$\Phi_q(g) \neq 0$.

לכן, מהנחת האינדוקציה (או אף מבסיסה), $\Phi_q(x) \cdot_q \Phi_q(g) \neq \Phi_q(g)$ ולכן, משימור הכפל,

$x \cdot_{q^n} g \neq g$. משייל

□

הלמה הבאה מציגה את הקשר בין המרכְּזים (Centralizers) של תת-חבורות הסילו לבין מרְכַּז (Center)

החבורה כולה ובין המרכְּזים (Centralizers) של תת-חבורות הסילו זו בזו:

למה 4.2 תכונות מרכזי תת-חבורות סילו שונות

יהיו $p\neq q$ ראשוניים אי-זוגיים, α,β שלמים חיוביים. תהי G חבורה מסדר $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$ שכל תת-חבורת סילו שלה היא אבלית. תהיינה $P\in Syl_p(G), Q\in Syl_q(G)$. אזי:

א. $C_G(P)=P\times C_Q(P)$ ו-$C_G(Q)=Q\times C_P(Q)$.

ב. $Z(G)=C_Q(P)\times C_P(Q)$.

<u>הוכחה</u>:

א. מספיק להוכיח $C_G(P)=P\times C_Q(P)$: מכך ש-P אבלית, נובע כי $P\leq C_G(P)$.

לכן:

$$C_G(P)=C_G(P)\cap G=C_G(P)\cap(PQ)=P(C_G(P)\cap Q)=PC_Q(P).$$

השוויון השלישי מסתמך על חוק דדקינד.

מכיוון ש- $|P,C_Q(P)|=1$ ו-$P\cap Q=1$ (מלמה 2.4), נקבל שהמכפלה $PC_Q(P)$ ישרה.

ב. מכיוון ש-$G=PQ$, נקבל ש-$g\in Z(G)$ אם ורק אם g מתחלף עם כל איבר ב-P ועם כל איבר ב-Q. טענה זו שקולה לטענה:

$$Z(G)=C_G(P)\cap C_G(Q)$$

נציב

$$C_G(P)=P\times C_Q(P) \text{ ו- } C_G(Q)=Q\times C_P(Q)$$

ונשתמש (פעמיים) בחוק דדקינד ונקבל:

$$Z(G)=(PC_Q(P))\cap(QC_P(Q))=(PC_Q(P)\cap Q)C_P(Q)=$$

$$(P\cap Q)C_Q(P)C_P(Q)=C_Q(P)C_P(Q)$$

מכיוון שהחיתוך בין שתי תת-חבורות מסדרים זרים הינו טריוויאלי, אזי $C_Q(P)\cap C_P(Q)=1$.

לכן, ומכיוון ש-$|C_Q(P),C_P(Q)|=1$, נקבל שהמכפלה $C_Q(P)C_P(Q)$ ישרה.

□

משהוכחנו את הלמות, נעבור להוכחת המשפט המרכזי של הפרק :

משפט 2. קביעת טיפוסי האיזומורפיזם בחבורות מסדר $|G|=p^\alpha q^\beta$

יהיו $p<q$ ראשוניים ו- α,β שלמים חיוביים.תהי G חבורה מסדר $|G|=p^\alpha q^\beta$ שכל תת-חבורת סילו שלה הינה ציקלית. תהיינה $P\in Sylow_p(G), Q\in Sylow_q(G)$. אזי :

א. $n_q=1$ ו-

א.1. אם G נילפוטנטית, אזי $n_p=1$.

א.2. אם G אינה נילפוטנטית, אזי $n_p=q^\beta$.

ב. יהי γ שלם אי שלילי כך ש- $p^\gamma \,||\, |Aut(Q)|$. נסמן $i=\min\{\alpha,\gamma\}+1$ אזי קיימים i טיפוסי איזומורפיזם אפשריים עבור G. ביתר פירוט : קיימות i חבורות לא איזומורפיות, $G_1,\ldots,G_i$ המקיימות :

ב.1. G_s מקיימת את הנחות המשפט לכל $1\le s\le i$.

ב.2. קיים $1\le j\le i$ יחיד שעבורו $G\cong G_j$.

ב.3. לכל $1\le s\le i$ מתקיים $G\cong G_s$ אם ורק אם $|Z(G)|=|Z(G_s)|$.

<u>הוכחה</u> :

א. ממשפט 2.28, G היא חבורה p-נילפוטנטית. אך מכך שסדר החבורה מורכב ממכפלת שני ראשוניים ומהגדרת חבורה p-נילפוטנטית, המשלים הנורמלי הינו $N=Q$. מכאן ש- $Q\trianglelefteq G$, ששקול, מלמה 2.3, ל- $n_q=1$.

א.1. נובע מיידית ממשפט 2.17.

א.2. נניח ש- G אינה נילפוטנטית. כדי להוכיח $n_p=q^\beta$, נוכיח ראשית ש- $C_Q(P)=\{1_G\}$: מכיוון ש- $Q\trianglelefteq G$, P פועלת על Q בהצמדה וגרעין הפעולה הוא $C_P(Q)$. מכיוון ש- G אינה נילפוטנטית, נקבל $C_P(Q)<P$. לכן $P/C_P(Q)$ איזומורפית לתת חבורה q' לא טריוויאלית של $Aut(Q)$

ופועלת נאמן בהצמדה על Q כמו תמונתה ב- $Aut(Q)$). מכיוון ש- $p<q$, ניתן להסיק ש- q ראשוני אי-זוגי.

יהי $x\in P\setminus C_P(Q)$. על פי למה 4.1, לכל $1\neq g\in Q$ מתקיים : $x^{-1}gx\neq g$.

מכאן נובע שאין אף איבר לא טריוויאלי של Q שמתחלף עם כל איברי P , כלומר $C_Q(P)=\{1_G\}$.

ממשפט 2.28, $N_G(P)=C_G(P)$. מלמה 4.2 (א') ו- $C_Q(P)=\{1_G\}$ נובע :

$$C_G(P)=P\times C_Q(P)=P$$

מכאן, $N_G(P)=P$ ולכן

$$n_p=|G:N_G(P)|=|G:P|=q^{\beta}.$$

ב.

ב.1. יהי $1\leq s\leq i$ שלם כלשהו. נגדיר את G_s. תהי P_1 חבורה ציקלית מסדר p^{α} ותהי Q_1 חבורה ציקלית מסדר q^{β}. מכיוון ש- P_1 ציקלית, יש לה תת-חבורה יחידה P_0 מסדר $p^{\alpha-i+s}$. יהי f איזומורפיזם כלשהו מחבורת המנה P_1/P_0 אל תוך תת-החבורה היחידה של $Aut(Q_1)$, שהסדר שלה הוא p^{i-s} . גם יחידות זו נובעת מציקליות $Aut(Q_1)$ (מתת פרק 2.2).

נגדיר פעולה של P_1/P_0 על Q_1 ע"י :

$$\forall x\in P_1,\forall g\in Q_1: g^{xP_0}=g^{f(xP_0)}$$

קל לבדוק שזו פעולה מוגדרת היטב וש- P_1/P_0 פועלת על Q_1 כמו תמונתה $f(P_1/P_0)\leq Aut(Q_1)$.

יתר על כן, פעולתה משרה פעולה של P_1 על Q_1 :

$$\forall x\in P_1,\forall g\in Q_1: g^{x}=g^{xP_0}=g^{f(xP_0)}$$

שגרעינה הוא תת החבורה P_0. נגדיר את G_s להיות המכפלה החצי ישרה של P_1 ו- Q_1 ביחס לפעולה שהגדרנו. בפרט, $C_{P_1}(Q_1)=P_0$. קל לוודא ש- G_s מקיימת את כל הנחות המשפט ובכך הוכחנו את טענת הסעיף.

ב.2. על פי הוכחת סעיף א', $P/C_P(Q)$ איזומורפית לתת חבורה q' לא טריוויאלית של $Aut(Q)$, שנסמנה J , ופועלת נאמן בהצמדה על Q כמו תמונתה ב- $Aut(Q)$. לכן $|P/C_P(Q)|$ מחלק גם את

p^{α} וגם את p^{γ}. מכאן שקיים $0\le j\le i$ יחיד שעבורו $|P/C_P(Q)|=p^{i-j}$. נגדיר איזומורפיזם $f:G\to G_j$ כדלקמן. ניתן להניח, בלי הגבלת הכלליות, $Q_1=Q$. על פי בנית G_j, גם $P_1/C_{P_1}(Q)$ איזומורפית ל- J ופועלת כמוה בהצמדה על Q.

יהיו $x_1\in P_1$ ו- $x\in P$ יוצרים של P_1 ושל P בהתאמה, כך ש- $x_1C_{P_1}(Q_1)$ ו- $xC_P(Q)$ פועלים על Q כמו אותו איבר ב- J. יהי g יוצר של Q. כל איבר ב- G ניתן להצגה יחידה בצורה $x^m g^n$ וכל איבר ב- G_j ניתן להצגה יחידה בצורה ${x_1}^m g^n$ עבור אילושהם שלמים $1\le m\le p^{\alpha}$ ו- $1\le n\le q^{\beta}$.

מכאן שכלל ההתאמה :

$$f\left(x^m g^n\right)={x_1}^m g^n,\ \forall 1\le m\le p^{\alpha}, 1\le n\le q^{\beta}$$

מגדיר פונקציה חח״ע ועל $f:G\to G_j$, שאת תכונת שימור הכפל שלה קל לוודא מבחירת $x_1\in P_1$ ו- $x\in P$ ותכונת הכפל במכפלה חצי ישרה.

ב.3. יהי $1\le s\le i$ נתון. אם $G\cong G_s$ אז $|Z(G)|=|Z(G_s)|$ מיידי. כעת נוכיח את הטענה ההפוכה. תהי $P_1\in Syl_p(G_s)$. כפי שראינו בסעיף ב׳2, ניתן להניח ש- $Q\in Syl_q(G_s)$. בהוכחת סעיף ב׳2 ראינו ש- $|P/C_P(Q)|=|P_1/C_{P_1}(Q)|$ גורר ש- G איזומורפית ל- G_s. לכן מספיק להוכיח שמ- $|Z(G)|=|Z(G_s)|$ נובע $|P/C_P(Q)|=|P_1/C_{P_1}(Q)|$. על פי למה 4.2 (ב׳), מתקיים $Z(G)=C_Q(P)\times C_P(Q)$. מכאן ש- $|Z(G)|=|C_Q(P)|\cdot|C_P(Q)|$. אך $|C_Q(P)|$ היא חזקה של הראשוני q ו- $|C_P(Q)|$ היא חזקה של הראשוני p ובאופן דומה עבור P_1 ולכן מכך ש- $|Z(G)|=|Z(G_s)|$ נובע $|C_P(Q)|=|C_{P_1}(Q)|$. מכאן, מכך ש- $|P|=|P_1|$, נובע $|P/C_P(Q)|=|P_1/C_{P_1}(Q)|$ ולכן $G\cong G_s$.

□

תוצאה :

תחת הנחות משפט 2 ובסימוניו, טיפוס האיזומורפיזם של G נקבע באופן יחיד על-ידי טיפוסי הסילו שלה, ומספרי הסילו אם ורק אם $i\in\{1,2\}$. אם $i=1$ אזי G בהכרח נילפוטנטית, ואם $i=2$ יש שני טיפוסי איזומורפיזם אפשריים עבור G, האחד נילפוטנטי והשני לא, שניתן להבחין ביניהם על פי הערך של n_p.

הערה :

חישובי GAP (ר' פרק 5) מראים שמסקנות משפט 2 אינן תקפות בחבורות Z שסדרן מתחלק בלפחות שלושה ראשוניים. דוגמה קונקרטית היא החבורות מסדר 273=3*7*13 עם מזהי GAP 3,4.

4.3. בניית מכפלות ישרות לא איזומורפיות בעלות טיפוסי סילו ומספרי סילו זהים

תת-פרק זה מציג בניה של מכפלות ישרות לא איזומורפיות עם אותם טיפוסי סילו ומספרי הסילו. בבניה נעזר בתוצאות מתת-פרק 2. נציג את הבניה באמצעות דוגמה.

נתבונן בצמד החבורות : G,H , כאשר כל חבורה הינה מכפלה ישרה של שלושה גורמים :

$$H=H_1\times H_2\times H_3\ ,\ G=G_1\times G_2\times G_3$$

וכאשר הגורמים הישירים הינם :

$$G_1\cong S_4\,,G_2\cong C_2\times C_2\times C_3,G_3\cong C_2\times C_3$$

$$H_1\cong D_8\times C_3\,,H_2\cong A_4\,,H_3\cong S_3$$

<u>רעיון הבניה</u> : נתאר את הבניה ללא הקפדה פורמלית כדי להבליט את המאפיינים העיקריים שאינם מיוחדים לדוגמה זו. נשים לב שהמחלקים הראשוניים של סדרי G ו- H הם 2 ו-3. לכל $1\le i\le 3$ ל- H_i ול- G_i יש תת-חבורות סילו איזומורפיות, לכל אחד משני הגורמים הראשוניים, אך מספרי הסילו של H_i ו- G_i אינם שווים (באחד מהגורמים מכפלת תת-חבורת-2 סילו בתת-חבורת-3 סילו היא ישרה ובמשנהו חצי-ישרה עם פעולה לא טריוויאלית). כשבונים את המכפלות הישרות $G=G_1\times G_2\times G_3$ ו- $H=H_1\times H_2\times H_3$ תכונת האיזומורפיזם של תת-חבורות הסילו של H_i ו- G_i נשמרת, ואילו "הפער" בין מספרי הסילו "מתוקן" (כמובן הודות לבחירה מושכלת של H_i ו- G_i).

<u>פרטי הבניה והוכחת נכונותה</u>:

מסדר מכפלות ישרות נובע כי :

$$|G|=|G_1|\cdot|G_2|\cdot|G_3|=|S_4|\cdot|C_2\times C_2\times C_3|\cdot|C_2\times C_3|=24*12*6=1728=2^6*3^3$$

$$|H|=|H_1|\cdot|H_2|\cdot|H_3|=|D_8\times C_3|\cdot|A_4|\cdot|S_3|=24*12*6=1728=2^6*3^3$$

נבחר תת-חבורות סילו-2 וסילו-3 ל- G ול- H :

$$P_G\in Syl_2(G),P_H\in Syl_2(H),Q_G\in Syl_3(G),Q_H\in Syl_3(H)$$

ותת-חבורות סילו-2 וסילו-3 גם לכל גורם:

$$\forall i:P_{G_i}\in Syl_2(G_i),P_{H_i}\in Syl_2(H_i),Q_{G_i}\in Syl_3(G_i),Q_{H_i}\in Syl_3(H_i)\ .$$

א. נמצא את תת-חבורות הסילו ונראה כי הן איזומורפיות : מלמה 2.6, לכל ראשוני p שמחלק את הסדר של מכפלה ישרה קיימת תת-חבורת סילו- p שהיא מכפלת של תת-חבורות סילו- p של גורמיה הישרים. על כן נמצא את תת-חבורות הסילו של גורמי המכפלה הישרה :

.i $P_{G_1} \cong D_8$ ו- $Q_{G_1} \cong C_3$.

.ii $P_{G_2} \cong C_2 \times C_2$ ו- $Q_{G_2} \cong C_3$.

.iii $P_{G_3} \cong C_2$ ו- $Q_{G_3} \cong C_3$.

.iv $P_{H_1} \cong D_8$ ו- $Q_{H_1} \cong C_3$.

.v $P_{H_2} \cong C_2 \times C_2$ ו- $Q_{H_2} \cong C_3$.

.vi $P_{H_3} \cong C_2$ ו- $Q_{H_3} \cong C_3$.

.2 חישוב P_G : $P_G \cong P_{G_1} \times P_{G_2} \times P_{G_\#} \cong D_8 \times C_2 \times C_2 \times C_2$

.3 חישוב P_H : $P_H \cong P_{H_1} \times P_{H_2} \times P_{H_3} \cong D_8 \times C_2 \times C_2 \times C_2$.

.4 חישוב Q_G : $Q_G \cong Q_{G_1} \times Q_{G_2} \times Q_{G_3} \cong C_3 \times C_3 \times C_3$

.5 חישוב Q_H : $Q_H \cong Q_{H_1} \times Q_{H_2} \times Q_{H_3} \cong C_3 \times C_3 \times C_3$

קיבלנו $Q_H \cong Q_G$ וגם $P_H \cong P_G$.

מציאת מספרי הסילו:

ב. נמצא את מספרי הסילו התואמים של G ו- H ונראה כי הם שווים : מלמה 2.8 לכל ראשוני p שמחלק את סדר החבורה, מספר הסילו- p של החבורה שווה למכפלת מספרי הסילו- p של גורמיה הישרים. את מספרי הסילו של גורמי המכפלה הישרה ניתן לחשב כאינדקסים של המנרמלים המתאימים ובנוסף להסתייע במשפטי סילו. מקבלים :

.1 $n_2(S_4)=3$ ו- $n_3(S_4)=4$.

.2 $n_2(G_2)=n_3(G_2)=1$.

.3 $n_2(G_3)=n_3(G_3)=1$.

.4 $n_2(H_1)=n_3(H_1)=1$.

.5 $n_2(H_2)=1$ ו- $n_3(A_4)=4$.

.6 $n_2(H_3)=3$ ו- $n_3(H_3)=1$.

הצבת המספרים נותנת $n_2(G)=n_2(H)=3$, $n_3(G)=n_3(H)=4$.

הוכחה שהחבורות אינן איזומורפיות :

ג. נחשב את מרכזי החבורות $G=G_1\times G_2\times G_3$ ו-$H=H_1\times H_2\times H_3$:

1. $Z(G)=G_2\times G_3\cong C_2\times C_2\times C_3\times C_2\times C_3$.

סדר המרכז : $O(Z(G))=72$.

2. $Z(H)\cong C_3\times C_2$.

סדר המרכז : $O(Z(H))=6$.

קיבלנו שמרכזי החבורה הם מסדרים שונים,ומכאן שהחבורות אינן איזומורפיות.

הערה: בבניה זו המרכזים של החבורות מסדר שונה (ובפרט אינם איזומורפיים), בדומה לחבורות שבמשפט 2. עם זאת, תת-חבורות הסילו אינן ציקליות בניגוד לחבורות במשפט 2.

4.4. טיפוסי האיזומורפיזם של חבורה מסדר 24

בסעיף זה נבדוק את שאלת המחקר שלנו על חבורות מסדר 24. לאור משפט 1 אפשר להגביל את הדיון לחבורות לא נילפוטנטיות. טבלה 1 מתבססת על מיון מלא של כל טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות מסדר 24 ([12], טבלה b5, עמוד 241). הטבלה מפרטת את כל טיפוסי האיזומורפיזם של חבורות לא נילפוטנטיות מסדר 24, ואת טיפוסי הסילו, מספרי הסילו, טיפוס האיזומורפיזם של המרכז וסדר המרכז של כל אחת מן החבורות (מספרי הסילו אינם ניתנים ב-[12] וחושבו באופן עצמאי).

המידע שבטבלה 1 ישמש אותנו להראות את הדיקות תנאי משפט 2 ובפרט את תנאי הציקליות – ראו דוגמאות בהמשך.

קיימות 10 חבורות לא נילפוטנטיות מסדר 24. מכיוון ש- $3\|24$, תת-חבורת הסילו-3 של חבורה מסדר 24 איזומורפית ל- C_3, ונתון זה מושמט מן הטבלה.

	החבורה G	$Z(G)$	$\|Z(G)\|$	תת-חבורת הסילו-2	n_2	n_3
.1	$\langle x,y \mid x^3=1=y^8, x^y=x^{-1}\rangle$	C_4	4	C_8	3	1
.2	$C_4\times D_6$	C_4	4	$C_4\times C_2$	3	1
.3	$C_2\times Q_{12}$	$C_2\times C_2$	4	$C_4\times C_2$	3	1
.4	$C_2\times D_{12}$	$C_2\times C_2$	4	$C_2\times C_2\times C_2$	3	1
.5	$C_2\times A_4$	C_2	2	$C_2\times C_2\times C_2$	1	4
.6	D_{24}	C_2	2	D_8	3	1
.7	S_4	$\{1_G\}$	1	D_8	3	4
.8	Q_{24}	C_2	2	Q_8	3	1
.9	$SL_2(3)$	C_2	2	Q_8	1	4
.10	T	$\langle x^2\rangle$	2	D_8	3	1

טבלה 1 - החבורות הלא-נילפוטנטיות מסדר 24

כאשר T היא חבורה מסדר 24 הנוצרת ע"י x,y,z שמקיימים $x^4=y^2=1, yxy^{-1}=x^{-1}$ כך ש- $\langle x,y\rangle$ איזומורפית ל- D_8 ו- z הוא איבר מסדר 3 כך ש- $z^x=z^{-1}$ ו- $z^y=z$.

חישוב מספרי הסילו עבור החבורות בטבלה 1

עבור כל G שבטבלה 1, תהי P תת-חבורת-2 סילו של G ו-Q תת-חבורת-3 סילו של G.

א. בכל החבורות הבאות Q נורמלית, כלומר $n_3=1$:

$$\langle x,y \mid x^3=1=y^8, x^y=x^{-1}\rangle, C_4\times D_6, C_2\times Q_{12}, C_2\times D_{12}, D_{24}, Q_{24}, T$$

נחשב את n_2 עבור החבורות הנ"ל: נחשב את המנרמל של P ב-G. מכיוון שבכל המקרים $G=PQ$, מספיק לבדוק את $N_Q(P)$. מכיוון ש-$N_Q(P)\le Q$ ו-$Q\cong C_3$, נקבל $N_Q(P)=Q$ או $N_Q(P)=1$. במקרה הראשון נובע $P\trianglelefteq G$ בסתירה לכך ש-G אינה נילפוטנטית. לכן $N_Q(P)=1$ ומכאן P מנרמלת את עצמה ולכן $n_2=3$.

ב. ביתר החבורות Q אינה נורמלית:

ממשפטי סילו, $n_2\equiv 1(\text{mod}2)$ ומחלק את 3. מכאן ש-$n_2\in\{1,3\}$.

i. חבורות בהן $n_2=1$: $C_2\times A_4$ ו-$SL_2(3)$.

ii. חבורות בהן $n_2=3$: S_4.

בהסתמך על טבלה 1 נציג שתי דוגמאות לכך שמסקנות משפט 2 אינן מתקיימות עבור חבורות G לא נילפוטנטיות שסדרן מתחלק בשני ראשוניים, אך הן אינן חבורות Z.

דוגמה 1

שתי החבורות בטבלה 2 הן חבורות לא איזומורפיות מסדר 24 שיש להן אותם טיפוסי סילו ומספרי סילו (בפרט $n_3=1$), וגם סדר המרכז של שתיהן שווה. הן אינן מקיימות את תנאי משפט 2 כיוון שתת-חבורת-2 סילו אינה ציקלית.

החבורה G	$Z(G)$	$\|Z(G)\|$	תת-חבורת הסילו-2	n_2	n_3
$C_4\times D_6$	C_4	4	$C_4\times C_2$	3	1
$C_2\times Q_{12}$	$C_2\times C_2$	4	$C_4\times C_2$	3	1

טבלה 2 - צמד חבורות עם מספרי וטיפוסי סילו שווים וסדר המרכז שווה

דוגמה 2

שתי החבורות בטבלה 3 הן חבורות לא איזומורפיות מסדר 24 שיש להן אותם טיפוסי סילו ומספרי סילו (בפרט $n_3=1$), וגם מרכזים איזומורפיים. הן אינן מקיימות את תנאי משפט 2 כיוון שתת-חבורת 2-סילו אינה ציקלית.

החבורה G	$Z(G)$	$\lvert Z(G)\rvert$	תת-חבורת הסילו-2	n_2	n_3
D_{24}	C_2	2	D_8	3	1
T	$\langle x^2\rangle$	2	D_8	3	1

טבלה 3 - צמד חבורות עם מספרי וטיפוסי סילו שווים ומרכז איזומורפי

5. חישובי דוגמאות באמצעות תוכנת GAP

בפרק זה נתאר את השימוש בתוכנת GAP [13] לחישוב דוגמאות שרלוונטיות לשאלת המחקר של העבודה.

החישובים ב-GAP אפשרו לנו:

1. להעלות השערות לגבי טענות כלליות.
2. לפסול השערות, או למצוא עדויות תומכות.
3. לנתח מאפיינים רלוונטיים ומשותפים למקרים בהם ההשערות אינן מתקיימות.

בחישובים העיקריים נעזרנו בספרית SmallGroups, אשר מכילה את כלל החבורות עד סדר 2000 למעט הסדר 1536. יתרון משמעותי של ספריה זו הוא קיום מזהה חד ערכי לכל טיפוס איזומורפיזם, החוסך הן את משאבי החישוב הנדרשים לצורך בדיקת איזומורפיזם בין חבורות שונות (או תת-חבורות הסילו שלהן) והן את משאבי הזיכרון, מאחר וניתן לשמור רשימת מזהי חבורות במקום את כלל המידע על החבורה. מזהה GAP לחבורה בספרית SmallGroups הינו זוג סדור של מספרים, כאשר הראשון הינו סדר החבורה והשני הינו מספר סידורי חד ערכי (ביחס לסדר) לטיפוס האיזומורפיזם של החבורה. לדוגמה, מזהי החבורות מסדר 4 הינם $[4,1]$ עבור החבורה הציקלית מסדר 4 ו-$[4,2]$ עבור חבורת קליין.

בהמשך נכנה את המרכיב השני של מזהה החבורה "מזהה חבורה סידורי".

פונקציות סטנדרטיות של GAP מאפשרות לחשב לכל חבורה נתונה, בין השאר, את:

1. הסדר שלה.
2. הפירוק הראשוני של הסדר.
3. תת-חבורת סילו לכל ראשוני שמחלק את הסדר.
4. מרכז החבורה.

כמו-כן, פונקציות סטנדרטיות נוספות מאפשרות לקבל מידע נוסף על החבורה, כגון האם היא ציקלית, האם היא נילפוטנטית וכד׳.

להלן תיאור בפסאודו קוד של אלגוריתם שמקבל כקלט מספר טבעי שמייצג סדר של חבורה סופית ומחזיר חלוקה של כל טיפוסי האיזומורפיזם של החבורות מסדר זה למחלקות כך שלכל החבורות באותה המחלקה יש אותם טיפוסי ומספרי סילו.

לצורך תיאור האלגוריתם נגדיר שני מבני נתונים :

1. PrimeFactorization : רשומה עם שלושה שדות לשמירת פירוק ראשוני של שלם $n>1$:
   א. PrimeFactorsNumber : שלם חיובי ששווה למספר הגורמים הראשוניים השונים של n.
   ב. PrimeFactors : רשימה באורך PrimeFactorsNumber של הגורמים הראשוניים של n.
   ג. PrimeMultiplcities : רשימה באורך PrimeFactorsNumber של הריבויים של הגורמים הראשוניים של n בהתאמה לסדר הגורמים ברשימה PrimeFactors.
2. SylTypesAndNums : רשומה לשמירת טיפוסי איזומורפיזם של חבורות סופיות מסדר $n>1$ שיש להן אותם טיפוסי ומספרי סילו.
   א. Key : מכיל רשימה באורך PrimeFactorsNumber שכל אחד מאיבריה הוא שלשה המכילה שלושה שדות :
      i. PrimeFactor : גורם ראשוני של הקלט n.
      ii. SylIdentifier : טיפוס סילו שייוצג על ידי מזהה חבורה סידורי של חבורה מסדר $PrimeFactor^{\propto}$ כאשר $PrimeFactor^{\propto}||\mathrm{n}$.
      iii. SylowNumber : מספר הסילו התואם לראשוני PrimeFactor .
   ב. GroupsNumber : מספר טיפוסי האיזומורפיזם השונים של חבורות מסדר n שיש להן את המפתח הנתון.
   ג. GroupsIdList : רשימה באורך GroupsNumber של מזהי החבורה הסידוריים של חבורות מסדר n שיש להן את המפתח הנתון.

<u>קלט</u> : סדר n של חבורה סופית (בתחום שמכוסה על ידי הספריה SmallGroups : סדרים 1 עד 2000 למעט הסדר 1536).

<u>פלט</u> : GroupsOfFixedOrder : רשימה של רשומות מטיפוס SylTypesAndNums.

<u>האלגוריתם</u> :

1. נחשב את הפירוק הראשוני המקובץ של n ונשמור אותו במבנה PrimeFactorization.
2. נכריז על רשימה בשם GroupsOfFixedOrder שאבריה יהיו רשומות מטיפוס SylTypesAndNums.
3. לולאה שרצה על מזהה החבורה הסידורי של חבורות מסדר n . שם משתנה הלולאה : CurrentGroupId.

3.1. ניצור עותק של החבורה G שמזהה GAP שלה הוא [n,CurrentGroupId]

3.2. ניצור רשימה ריקה TempKey במבנה הזהה למפתח Key.

3.3. לכל גורם ראשוני p ב-PrimeFactors ,

3.3.1. נמצא את $P \in Syl_p(G)$ ואת המזהה הסידורי שלה, שיוגדר CurrentSylId.

3.3.2. נחשב את n_p ע״י חישוב אינדקס המנרמל של תת-חבורת הסילו.

3.3.3. נשמור במשתנה TempKey את הרשימה [n_p , CurrentSylId, p].

3.4. אם קיימת ברשימה GroupsOfFixedOrder רשומה עבורה Key= TempKey, אזי :

3.4.1. נסמן את הרשומה FitRecord

3.4.2. נקדם ב-1 את השדה GroupsNumber ב-FitRecord .

3.4.3. נוסיף לרשימה GroupsIdList ב-FitRecord את CurrentGroupId.

3.5. אחרת,

3.5.1. ניצור ב-GroupsOfFixedOrder רשומה חדשה עם הערכים הבאים :

3.5.1.1. Key := TempKey.

3.5.1.2. GroupsNumber := 1.

3.5.1.3. נוסיף לרשימה GroupsIdList ב-FitRecord את CurrentGroupId.

4. נחזיר את GroupsOfFixedOrder ו-PrimeFactorization .

6. סיכום

בעבודה זו חקרנו את השאלה, עד כמה טיפוסי הסילו ומספרי הסילו של חבורה סופית קובעים את טיפוס האיזומורפיזם שלה. הראינו שבעוד שטיפוסי הסילו ומספרי הסילו של חבורה נילפוטנטית קובעים באופן יחיד את טיפוס האיזומורפיזם שלה, הרי שקיימות דוגמאות של חבורות לא נילפוטנטיות בעלות מבנה פשוט יחסית (סדרים קטנים עם שני מחלקים ראשוניים, חבורות סילו ציקליות) שעבורן טענה זו אינה נכונה. הצבענו על דרך עקרונית לבנות דוגמאות נגד לטענה הנ"ל באמצעות מכפלות ישרות, ובנוסף, חקרנו בפירוט את המקרה של חבורות Z (חבורות שכל חבורות הסילו שלהן הן ציקליות) שלסדרן יש בדיוק שני מחלקים ראשוניים. התוצאה העיקרית (משפט 2) של העבודה מציגה את כל טיפוסי האיזומורפיזם השונים של חבורות Z כנ"ל מסדר נתון, שיש להן אותם טיפוסי ומספרי סילו. בפרט הראינו שטיפוסי האיזומורפיזם השונים נבדלים זה מזה על פי סדר מרכז החבורה. עם זאת, חישוב בעזרת GAP מראה שניתן למצוא שתי חבורות לא איזומורפיות מסדר pqr כאשר $p<q<r$ ראשוניים, שיש להן את אותם מספרי סילו ואף מרכזים איזומורפיים. דוגמה קונקרטית היא החבורות מסדר $273=3*7*13$ עם מזהי GAP 3,4.

נסיים בהצגה של מספר שאלות שעולות מן העבודה והתוצאות שקבלנו, ויכולות לשמש כבסיס למחקר עתידי בתחום.

1. האם ניתן להכליל את משפט 2 למקרה של חבורת Z כללית? ביתר פירוט: תהי G חבורת Z כלשהי מסדר נתון שקבוצת מחלקיו הראשוניים היא $\pi(G)=\{p_1,\dots,p_k\}$.
   א. מהם הערכים האפשריים עבור מספרי הסילו של G?
   ב. בהינתן $\{n_{p_1},\dots,n_{p_k}\}$ האם ניתן לאפיין את כל טיפוסי האיזומורפיזם האפשריים של G שאלו מספרי הסילו שלה? האם ניתן למנות אותם? האם ניתן להבדיל ביניהם על-פי טיפוס האיזומורפיזם של תת-חבורה קרקטריסטית של G?
2. בפרק 3 סקרנו שאלה דומה לשאלת המחקר שלנו, שנלמדה בספרות [[3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]] , והיא עד כמה טיפוס האיזומורפיזם של חבורה פשוטה לא אבלית נקבע על ידי סדר החבורה ומספרי הסילו שלה. כפי שראינו יש מספר משפחות של חבורות פשוטות לא אבליות שטיפוס האיזומורפיזם שלהן נקבע באופן יחיד על ידי סדר החבורה ומספרי הסילו שלה, אך יש גם דוגמאות נגד. נשים לב שהתנאי שבו אנחנו דנים כאן הוא גרסה חלשה יותר של התנאי שבו דנו בעבודה הנוכחית, ולכן שאלה טבעית שמתעוררת לאור תוצאות אלו, היא לבדוק את שאלת המחקר

שלנו עבור חבורות פשוטות לא אבליות.במילים אחרות, האם טיפוסי הסילו ומספרי הסילו של חבורה פשוטה לא אבלית קובעים באופן יחיד את טיפוס האיזומורפיזם שלה?

3. האם ניתן למצוא ניסוח כמותי מעניין לשאלת המחקר של העבודה? לדוגמה: יהי $n>1$ מספר טבעי, יהי t מספר טיפוסי האיזומורפיזם השונים של חבורות מסדר n ויהי m המספר המקסימלי של טיפוסי איזומורפיזם של חבורות מסדר n שלכולן אותם טיפוסי ומספרי סילו. מה ניתן לומר על היחס m/t כפונקציה של מספר הגורמים הראשוניים השונים של n והריבויים שלהם?

רשימת ספרות

[1] D.S. Dummit and R.M.Foote, Abstract Algebra, Third edition, John Wiley & Sons, Inc., (2004).

[2] J.S. Rose, A Course on Group Theory, Dover Publications, Revised ed. Edition (2012).

[3] J. Bi, A characterization of L2(q), (Chinese) , J. Liaoning Univ (Natural Sciences Edition), 19 (2) (1992), 1-4.

[4] J. Bi, A characterization of Ln(q) by the normalizers' orders of their Sylow subgroups, Acta Math. Sinica (New Ser.), 11 (3) (1995), 300-306.

[5] J. Bi, On the group with the same orders of Sylow normalizers as the finite simple group S4(q), Algebras, Groups and Geom., 18 (3) (2001), 349-355.

[6] J.Bi, Characterization of alternating groups by orders of normalizers of Sylow subgroups, Algebra Colloq., 8 (3) (2001), 249-256.

[7] J. Bi, On the group with the same orders of Sylow normalizers as the finite projective special unitary group, Sci. China Ser. A., 47 (6) (2004), 801-811.

[8] Behrooz Khosravi and Bahnam Khosravi, Two new characterizations of the Mathieu simple groups, Internat. J. Math. and Mathmatical Science, 9 (2005), 1449-1453.

[9] Behrooz Khosravi and Bahman Khosravi, Groups with same orders of Sylow normalizers as the Janko groups, J. Apple. Algebra Discrete struct., 3 (2005), 23-31.

[10] A. Iranmanesh and N. Ahanjideh, A characterizaton of ${}^2D_n\left(p^k\right)$ by order of normalizer of Sylow subgroups, , International Journal of Algebra, 2 (18) (2008), 853-865.

[11] N. Ahanjideh and A. Iranmanesh, On the Sylow normalizers of some simple classical groups, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 35(2) (2012), 459–467.

[12] J.F. Humphreys, A Course in group theory, Oxford : Oxford University Press, 2004, c1996.

[13] The GAP Group, GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.7, 2017, http://www.gap-system.org.