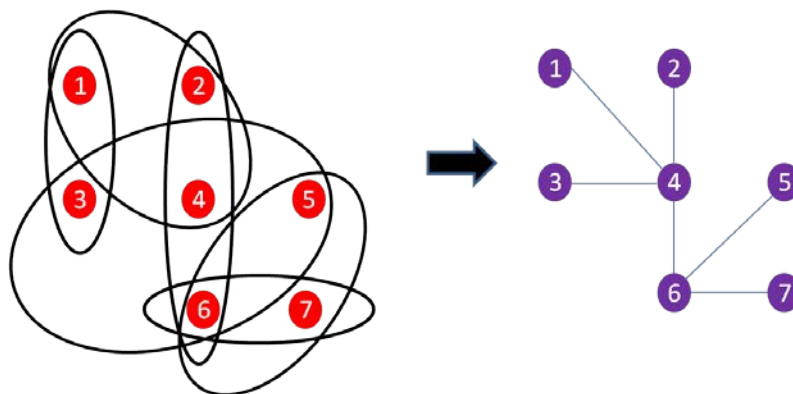


Nodes Insertion For The Intersecting Clusters Problem

עבודת גמר במסגרת תואר שני במכללה האקדמית של תל-אביב יפו



מגיש: זאב שורק

034251058

מנחות: פרופ' מיכל שטרן

ד"ר נילי בק

תוכן עניינים

- מבוא.....3
- פרק 1: הצגת הבעיה.....6
- א. הגדרת הבעיה.....6
- ב. פונקציות מטרה.....7
- פרק 2: תנאים להכרעה - תתי-קבוצות עם חיתוך יחיד.....5
- א. הגדרת גרף הקשירות.....9
- ב. גרפי קשירות בתצורת עץ.....13
- ג. גרפי קשירות מעגליים.....14
- ד. גרפים רדודים.....22
- ה. תוצאות.....24
- פרק 3: תנאים להכרעה - תתי-קבוצות עם חיתוך לא מוגבל.....25
- א. גרפי קשירות בתצורת עץ.....25
- ב. גרפים רדודים.....29
- פרק 4: גרף קשירות אדום-שחור.....32
- א. הגדרה.....32
- ב. גרף קשירות אדום-שחור מצומצם.....37
- ג. מעגלים בגרף קשירות אדום-שחור.....39
- פרק 5: גרף קשירות ממושקל.....43
- א. הגדרה.....43
- ב. תנאי הכרעה בגרף ממושקל.....44
- פרק 6: הוספת קודקודים לגרף הבעיה.....47
- א. פתרון הכוכב.....47
- ב. בחינת פונקציות המטרה.....49
- ג. גרפי קשירות של מעגל עם מיתרים.....51
- ד. הוספת קודקודים בגרף אדום-שחור.....59
- פרק 7: סיכום והמשך המחקר.....62
- פרק 8: ביבליוגרפיה.....63

מבוא

בעבודה זו אנו בוחנים את הבעיה הכללית הבאה:

נתון G גרף שלם לא מכוון ש- V היא קבוצת קודקודיו, ו- E היא קבוצת הקשתות הלא מכוונות בין כל זוג קודקודים, עם משקל חיובי על כל קשת. כמו כן נתון היפרגרף עם אוסף אשכולות S של תתי-קבוצות של V . אנו רוצים למצוא תת גרף של G המקיים מספר תנאים על האשכולות ב- S . אפרים קורח ומיכל שטרן הציגו ב [8] וב [13] את הבעיה הכללית:

General optimal clustering problem.

בחלק הראשון של עבודה זו, בחרנו להתמקד במציאת תנאים להכרעת הבעיה – האם קיים לגרף הבעיה המקורי עץ פתרון או שלא. חלקה השני של העבודה עוסק במופעים של הבעיה שאינם אפשריים, כלומר לא מקיימים לפחות אחד התנאים על S שהוגדרו כדרישה לפתרון. במקרה זה ניתן לבצע מספר שינויים בנתוני הבעיה על מנת להשיג פתרון. שינויים אלו יכולים להיות הורדה או הוספה של קודקודים מהאשכולות ב- S . במקרים אלו ישנן אפשרויות רבות להגדיר את פונקציית המטרה, כמו למשל מינימום על מספר הקודקודים שמורידים או שמוסיפים, מינימום על מספר הקבוצות בהן מתבצע שינוי או מינימום משקל של תת הגרף שמתקבל. בעבודה זו בחרנו באפשרות של הוספת קודקודים לאשכולות ב- S , ובבחינה של מספר פונקציות מטרה אשר יפורטו בהמשך.

לבעיה ישנם שימושים רבים בתחומים שונים, נמנה כמה מהם:

1. ביואינפורמטיקה –

בתחום האבולוציה, הבעיה מוגדרת על עצי התפתחות אבולוציוניים [3] [4]. עצים פילוגנטיים או עצים אבולוציוניים הם גרפים של עצים המייצגים את היחסים האבולוציוניים המשוערים בין מינים ביולוגיים שונים. הרעיון הוא לנסות ולמצוא אב קדמון משותף למינים השונים על בסיס דמיון גנטי.

כל קודקוד בגרף מייצג אחד המינים, ופיצול מגדיר שני מינים בעלי מוצא משותף. כל תת קבוצה ב- S מייצגת תכונה משותפת (למשל גן משותף או חלבון). מטרת הבעיה היא מציאת עץ האבולוציה (במקרה זה עץ מכוון), תחת ההנחה שכל תת קבוצה תיצור תת עץ קשיר בעץ הפתרון. יש לזכור כי בעצים אלו העלים הם מינים הקיימים כיום, בעוד הקודקודים הפנימיים, הם מינים משוערים בלבד, כי אין לנו תצפית ישירה על מינים אלו.

בשיטת הפתרון אותה אנו מציעים – הוספת קודקודים, משמעותה הוספת מין לא מוכר, אשר יסביר טוב יותר את ההתפתחות האבולוציונית של גנים שונים.

2. רשתות ארגוניות

ניתוח רשתות ארגוניות הוא תחום חדש יחסית הצובר תאוצה בשנים האחרונות. תחום זה נולד מניתוח רשתות חברתיות (Social Network Analysis). ישנן תובנות רבות שניתן לקבל על הארגון מניתוח רשת קשרי העבודה וההיררכיה בו. הממצאים יכולים להעיד על תרבות ארגונית, שיתוף הפעולה בין עובדים ובין מחלקות, שיתוף הפעולה הפנימי בתוך מחלקות ועוד.

הרעיון הוא כי ניתן להסתכל על רשתות ארגוניות כגרף. קודקודי הגרף - V , מייצגים את האנשים העובדים במחלקות השונות בארגון.

אוסף תתי הקבוצות יתאר את המחלקות השונות, כאשר לכל מחלקה תפקיד אחר או תחום עליו היא אחראית. הקודקודים מייצגים אנשים העובדים במחלקות. המטרה שלנו לאפשר זרימה ממודרת של מידע במבנה הארגוני (כלומר, כל עובד ידע את המידע הרלוונטי לתחומים בהם הוא עוסק). במצב הנוכחי, במבנה ארגוני גדול קיימות מספר בעיות:

כפילויות – יתכנו כפילויות בזרימת המידע בין המחלקות השונות. בזבז זמן - הכפילויות יכולות להוביל לזרימה של מידע מיותר ו/או זרימה איטית של מידע (בהנחה כי יש מסלולים בהם המידע עובר באופן יעיל יותר ומהר יותר) כאשר המשקל מבטא יעילות או מהירות של מעבר המידע. פתרון הבעיה על ידי עץ פורש יכול לצמצם ואף למנוע בעיות אלו. המחקרים בתחום עסקו בפתרון לבעיה המגדיר איזה מעבר מידע (קשתות) צריך להשאיר ואיזה להוציא [12] [14].

3. אבטחת מידע

תחום אבטחת המידע ברשתות תקשורת מודרניות הפך להיות בין התחומים החשובים ביותר בנושא רשתות תקשורת בשנים האחרונות. ניתן לייצג רשתות תקשורת כגרפים: בגרף זה כל נקודת-קצה תיוצג על-ידי קודקוד. המטרה תהיה בניית רשת תקשורת אמינה או מהירה בין קבוצות שונות של לקוחות, כך שבגרף המתקבל כל תת קבוצה תיוצג על-ידי תת גרף קשיר [7].

הבעיה הרלוונטית העוסקת באבטחת המידע ברשתות תקשורת נקראת – The Optimal complete Stars Clustering Problem. בעיה זו עוסקת במקרה בו מחפשים עץ בגרף הנתון G , אך הדרישה היא כי כל תת קבוצה S , תפרש על ידי כוכב מלא. הרעיון הוא הפצה מהירה של המידע בתוך אזורים "בטוחים" ושינוע קצר ככל האפשר של המידע בתחום הלא-בטוח, בין אזורים אלו. המחקר של אפרים קורח ומיכל שטרן [9] עסק במשפטים על מבניות הפתרון, ומציאת אלגוריתם לפרישת הרשת בזמן פולינומיאלי.

ישנן גרסאות שונות של הבעיה הכללית, כתלות במבנה המבוקש של תת-הגרף של הפתרון (מסלול, עץ וכדומה) והמבנים השונים של תתי-הגרפים עבור כל אחד מהאשכולות (קשיר, מסלול, עץ ועוד).

עבור חלק מהגרסאות ישנן עבודות קודמות:

1. The TSP-Path for intersecting clusters

גרסה זו דנה במקרה שבו תת הגרף המבוקש הוא מסלול, הפורש על כל אשכול תת-מסלול קשיר. ספרות נרחבת יחסית דנה במקרה שבו האשכולות זרים. ב- [10] מציעים אלגוריתם סעף וחסום לפתרון הבעיה, ב-[11] מחפשים אלגוריתם גנטי, וב-[1], [2] ו-[5] מחפשים אלגוריתמי קירוב. עבור המקרה שבו האשכולות אינם זרים יש תוצאות ב-[6].

2. The Optimal Complete Stars Clustering Tree Problem

גרסה זו דנה במקרה שבו מחפשים עץ, שבו כל אשכול ב S -נפרש על ידי כוכב מלא. גרסה זו רלוונטית בעיקר לאבטחת מידע ברשתות תקשורת. ב- [9] ישנו משפט הנוגע למבניות של הפתרון ואלגוריתם פולינומיאלי שמסתמך על המשפט.

3. The clustering k-cactus problem

גרף k-cactus הוא גרף המתקבל מעץ, כאשר כל קודקוד עשוי להיות מוחלף במעגל פשוט בעל k צמתים לכל היותר. בגרסה זו מחפשים תת גרף של הגרף הנתון שהוא k-cactus כך שכל אשכול נפרש על ידי תת גרף קשיר.

עבור $k=3$ וכאשר כל תת-קבוצה ב S -כוללת לכל היותר 3 קודקודים, קיים אלגוריתם לינארי. ב- [13] דנים בשתי גישות לפתרון בעיה זו.

בעבודה זו נגדיר בפרק 1 בצורה מדויקת את גרסת הבעיה בה נעסוק בעבודה זו, את פונקציות המטרה השונות שנחקור, וסימונים כלליים.

בפרק 2 נגדיר את המושג של גרף קשירות, אשר בעזרתו ננסה להכריע האם לבעיה קיים פתרון או לא. כמו כן ננתח תצורות שונות של גרפי קשירות. בפרק זה נעסוק בתתי-קבוצות עם חיתוך יחיד בלבד.

בפרק 3 נרחיב את התוצאות מהפרק הקודם גם לתתי-קבוצות עם חיתוך לא מוגבל, ונגדיר מהם גרפים רדודים.

בפרק 4 נדון בסוג חדש של גרף קשירות – גרף קשירות אדום-שחור, ונראה כיצד הוא תורם להבנה של הבעיה וההכרעה שלה.

בפרק 5 נבחן גרף קשירות חדש – גרף קשירות ממושקל. בעזרת גרף קשירות זה ניתן להכריע את הבעיה בצורה חד-ערכית, תוך שימוש ברעיון של האלגוריתם החמדני של MST – עצים פורשים מינימאליים.

פרק 6 עוסק במופעים בלתי פתירים של הבעיה ובוחן את פונקציות המטרה השונות תוך הוספת קודקודים לגרף הבעיה המקורי.

פרק 7 מביא סיכום של העבודה והצעות להמשך המחקר בתחום זה.

פרק 1 - הצגת הבעיה

א. הגדרת הבעיה

יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף שלם, כאשר $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ קבוצת קודקודי הגרף, ו- E היא קבוצת הקשתות (לא-מכוונות). בנוסף, יהי $HG = \langle G, S \rangle$ היפרגרף, כאשר $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ הוא אוסף של תתי קבוצות שונות של V , (לעיתים, מכונות בספרות "אשכולות") כך שמתקיים:

1. S מכסה את V .
2. גרף החיתוך של S הוא קשיר.

המטרה: מציאת תת גרף של G , בעל תכונות מסוימות, המקיים דרישות על תתי-קבוצות ב- S . הדרישה הבסיסית היא שכל תת-קבוצה ב- S תפרש על-ידי תת-גרף בעל אותן תכונות מסוימות.

בעבודה זו נתמקד בפתרונות בהם תת-הגרף המבוקש הוא עץ קשיר (להלן, כל עץ הוא קשיר). נקרא לעץ כזה: "עץ-פתרון" – עץ הפורש את הגרף G , ומהווה עץ פורש לכל אחת מתתי-הקבוצות S_i .

נבחן באילו מקרים קיים פתרון לבעיה ובאילו לא. במקרים בהם אין פתרון אפשרי לבעיה, על מנת למצוא פתרון, נאפשר שינוי בנתוני הבעיה - הוספת קודקודים.

סימונים

- $s_i = |S_i|$ - כלומר, s_i (אות קטנה) מסמנת את גודל (מספר הקודקודים) קבוצה S_i .
- V_{ij} - קבוצת קודקודי החיתוך בין תת-קבוצה S_i לתת-קבוצה S_j .
- $D(v)$ - מספר הקבוצות המכילות את קודקוד v .

עבור המקרים בהם אין פתרון לבעיה, נגדיר מספר פונקציות מטרה לבחינת השינוי (הוספת קודקודים) בנתונים ואת הסימונים הבאים:

- $F(G, S)$ - פונקציית המטרה התלויה בגרף G , ובתתי-הקבוצות S .
- $A(S_i)$ - מספר הקודקודים שנוספו לתת-הקבוצה S_i .
- $N(v_i)$ - מספר תתי-הקבוצות שקודקוד v_i נוסף להן.

ב. פונקציות מטרה

1. מציאת המספר המינימאלי של קודקודים שנוספו לתתי-הקבוצות. נגדיר -

$$F_1(G, S) = \sum_i A(S_i)$$

ונחפש:

$$\text{Min } F_1(G, S)$$

בפונקציה זו אנו רוצים למזער את מספר הקודקודים שהוספנו לתתי-הקבוצות, ללא קשר לכמות הקודקודים שנוספו לכל קבוצה ספציפית. קודקוד v_i אשר נוסף למספר תתי קבוצות – יספר עבור כל אחת מהקבוצות להן נוסף.

2. פונקצית מטרה מסוג MinMax. נגדיר -

$$F_2(G, S) = \text{MAX}_i\{N(v_i)\}$$

ונחפש:

$$\text{Min } F_2(G, S)$$

בפונקציה זו אנו מעוניינים למזער את מספר ההוספות של קודקוד ספציפי לתתי הקבוצות. הרעיון העומד מאחורי הבחירה של פונקציה זו הוא לוודא שאין צומת יחיד ש"שולט" על הפתרון. כלומר אנו מחפשים פתרון בו אין קודקוד אחד אליו מחוברים מספר רב של תתי קבוצות, בדומה למרכז של כוכב.

יתכן גם שילוב של שתי הפונקציות לעיל:

$$\text{Min } F_1(G, S) \text{ s.t. } F_2(G, S) \leq k$$

בפונקציה זו אנו דורשים למצוא מינימום ל F_1 , כאשר ישנו אילוץ הדורש ש F_2 תהיה קטנה או שווה ל K נתון כלשהו.

3. מציאת המספר המינימאלי של קבוצות בהן יתבצע שינוי. נגדיר -

$$F(S_i) = \begin{cases} 1, & A(S_i) > 0 \\ 0, & A(S_i) = 0 \end{cases}$$

$$F_3(G, S) = \sum_i F(S_i)$$

ונחפש:

$$\text{Min } F_3(G, S)$$

בפונקציה זו, מעניין אותנו רק מספר הקבוצות בהם בוצע שינוי, כלומר לכמה קבוצות הוספנו קודקודים, ולא מספר הקודקודים שנוספו לכל קבוצה.

פרק 2 – תנאים להכרעה - תתי-קבוצות עם חיתוך יחיד

א. הגדרת גרף הקשירות

נתחיל לחקור היפר-גרפים עם תתי-קבוצות בגודל לא מוגבל, אך עם חיתוך בגודל 1 לכל היותר. כלומר לכל i, j ו- $1 \leq i, j \leq n$ מתקיים:

$$S_i \cap S_j \leq 1$$

נחפש תנאים להכרעת הבעיה. כלומר, האם יש פתרון לבעיה או לא. בהמשך ננסה למצוא אלגוריתם לפתרון אופטימלי במקרה שלבעיה המקורית אין פתרון.

לצורך כך נגדיר את המושג 'גרף קשירות', וננסה להכריע את הבעיה בעזרתו.

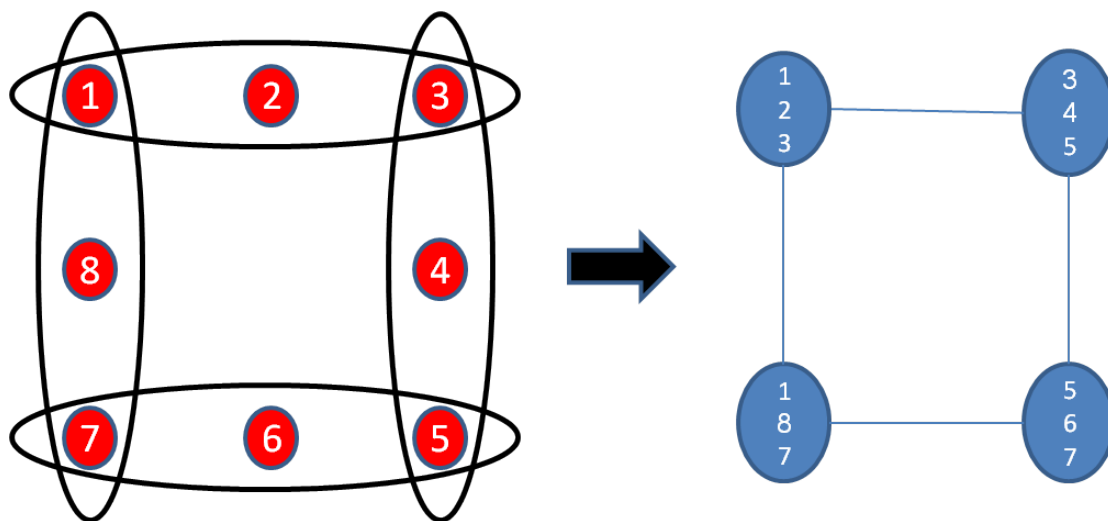
2.1. הגדרה: גרף קשירות – יהי G גרף הבעיה המקורי, ותהי $S = \{S_i\}_{i=1}^n$ קבוצת תתי-קבוצות (האשכולות) של קודקודי G .

$IG = \langle V_{IG}, E_{IG} \rangle$ יקרא גרף הקשירות של G כך שכל אשכול מיוצג על ידי קודקוד, ויש קשת בין זוג קודקודים אם החיתוך בין האשכולות המתאימים לקודקודים איננו ריק:

$$E_{IG} = \{\{S_i, S_j\} \mid S_i \cap S_j \neq \emptyset\}, \quad V_{IG} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

לדוגמה: (משמאל הגרף המקורי, מימין גרף הקשירות)

איור 2.1 – גרף בעיה וגרף הקשירות המתאים לו

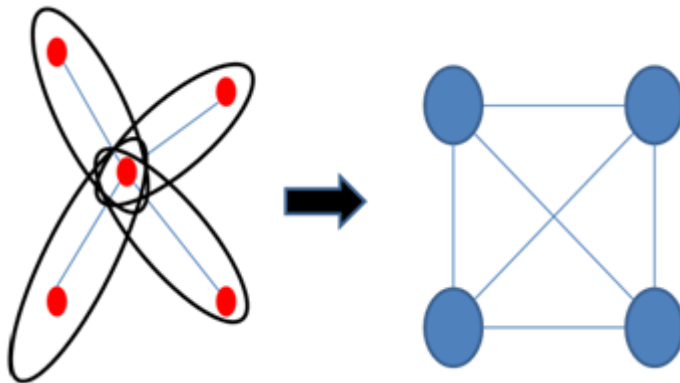


גרף הקשירות – סימונים ותכונות

- קשת בגרף הקשירות – משמעותה קודקוד המשותף לשתי תתי-קבוצות בגרף המקורי.
- גודל גרף הקשירות – מספר תתי הקבוצות ב S (יסומן ב n לאורך העבודה).
- U_i - קודקוד בגרף הקשירות המייצג את תת-הקבוצה S_i בהיפרגרף הבעיה.

2.2. למה: אם בגרף הבעיה קיים קודקוד ששייך ליותר משתי קבוצות – אז בגרף הקשירות קיים משולש. יתרה מכך, אם קיים קודקוד השייך ל K קבוצות – אז בגרף הקשירות קיימת קליקה בגודל K . (באופן שקול – אם אין משולש בגרף הקשירות – כל קודקוד בגרף הבעיה שייך לכל היותר לשתי קבוצות)

איור 2.2 – גרף בעיה היוצר גרף קשירות שהוא 4-קליקה



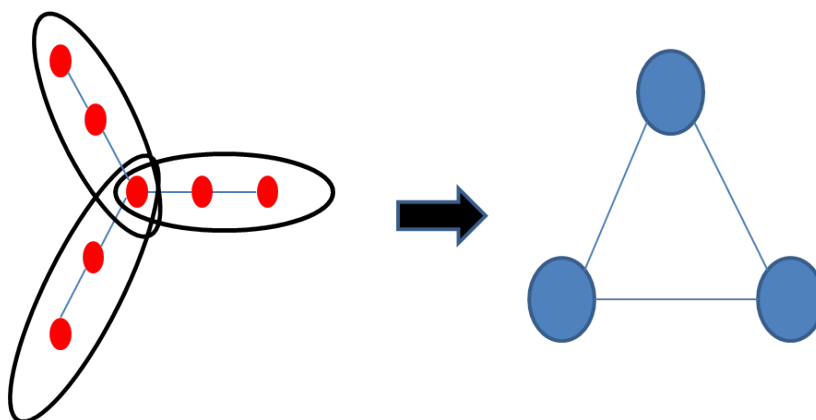
נציין כי מקרה זה לא סותר את ההנחה הראשית בפרק זה, שהחיתוך בין כל שתי תתי-קבוצות הוא לכל היותר קודקוד אחד. קודקוד יכול להיות בחיתוך של מספר קבוצות, ועדיין החיתוך בין כל שתי קבוצות שנחתכות יהיה קודקוד יחיד.

הוכחה:

נניח כי בגרף הבעיה קיים קודקוד v המשותף ל K קבוצות שונות. מצורת הבניה של גרף הקשירות, בה כל קשת מהווה קודקוד המשותף לשתי תתי-קבוצות, היתה נוצרת קליקה בגודל K בגרף הקשירות.

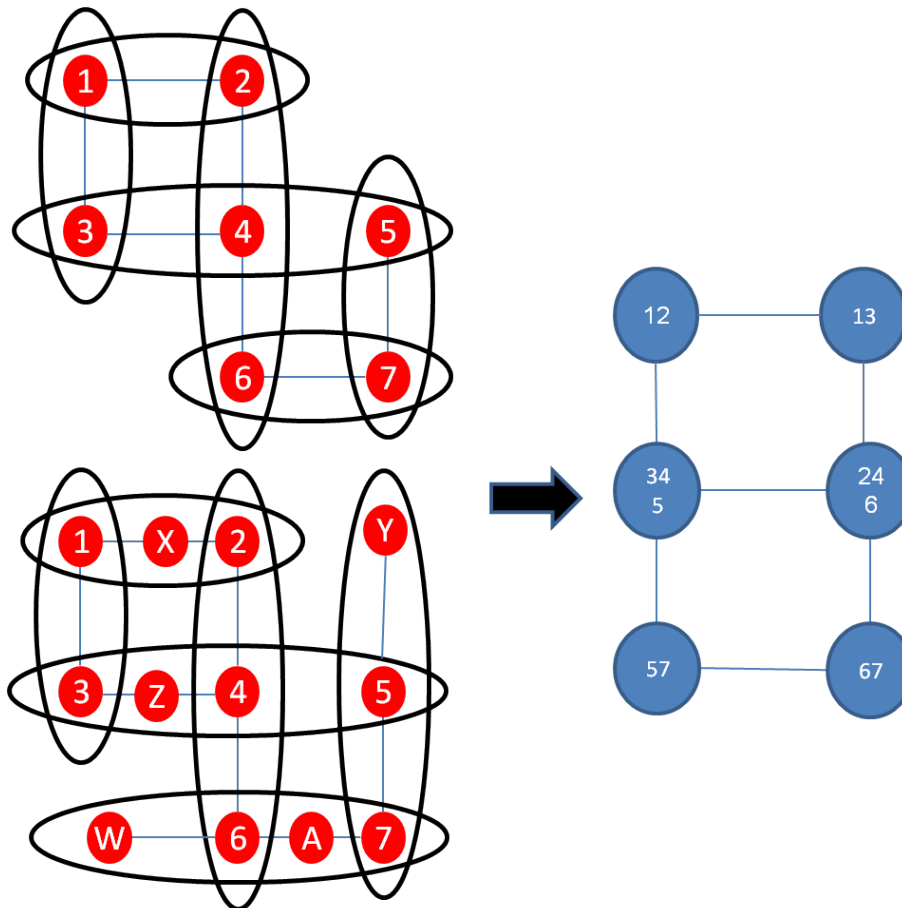
□

איור 2.3 – גרף בעיה היוצר גרף קשירות שהוא 3-קליקה



אבחנה חשובה – כפי שניתן לראות באיור, ישנם קודקודים שאינם משנים את גרף הקשירות. באיור הבא, הדבר היחיד המבדיל בין שני הגרפים להם יש אותו גרף קשירות, אלו קודקודים ששייכים לתת-קבוצה אחת בלבד.

איור 2.4 – גרפי בעיה עם אותו גרף קשירות



2.3. הגדרה: גרף מצומצם – הגרף המקורי לאחר מחיקת כל הקודקודים ששייכים לתת-קבוצה יחידה. (באיור – הגרף התחתון הוא הגרף המקורי, והעליון הוא הגרף המצומצם). כלומר קבוצת הקודקודים כוללת:

$$V' = \{v \in V \mid d(v) > 1\}$$

2.4. טענה – אם יש עץ פתרון לגרף המצומצם - יש עץ פתרון גם לגרף הבעיה המקורי.

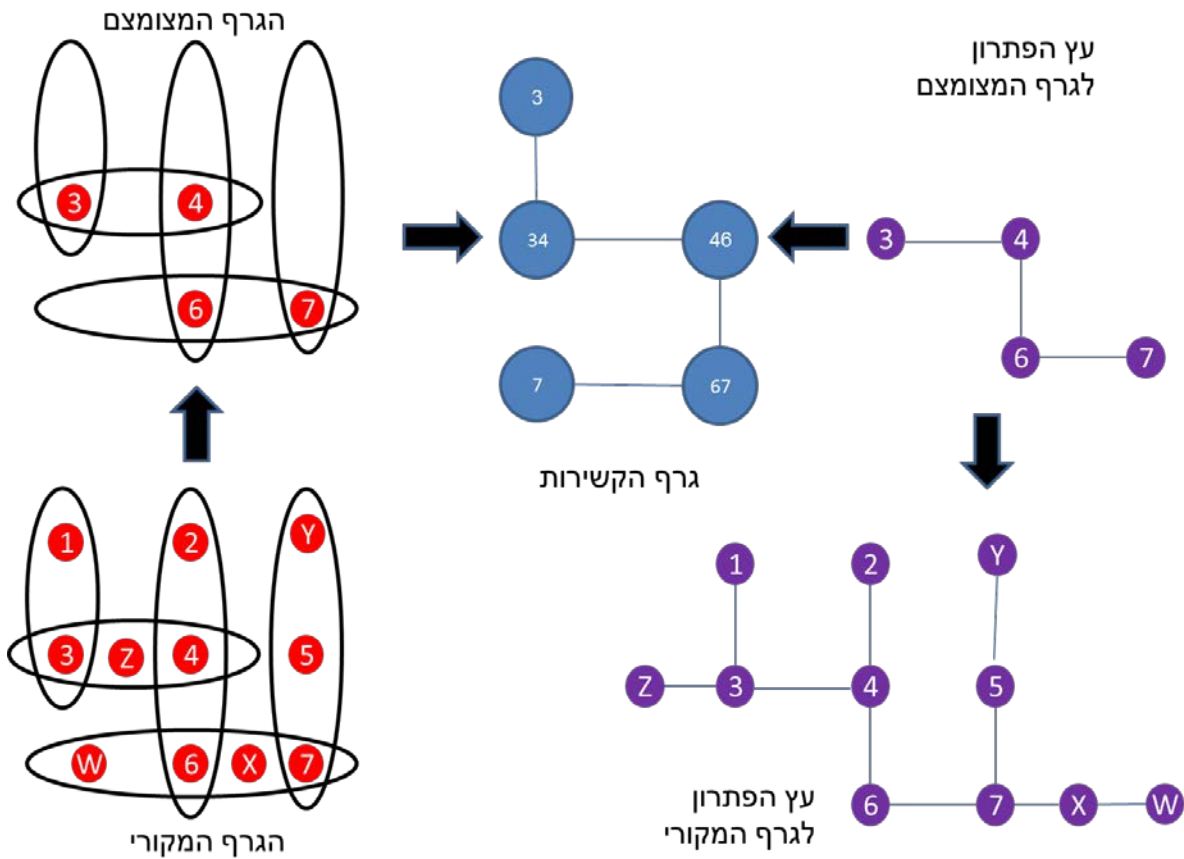
הוכחה – נניח כי יש עץ פתרון לגרף המצומצם ונראה (בבניה) כי יש עץ פתרון לגרף המקורי.

יהי T עץ הפתרון של הגרף המצומצם. כלומר, T פורש את הגרף כולו, וכן כל אחת מתתי-הקבוצות שלו. כעת נוסיף באופן שרירותי, לכל אחת מתתי-הקבוצות, את הקודקודים שמחקנו קודם. נוסיף את הקודקודים הללו לתת-הקבוצה שמכילה אותם,

על ידי שרשור מסלול, לאחד מהקודקודים ששייכים לאותה תת-הקבוצה וכבר כלולים בעץ הפתרון לגרף המצומצם. בכך מצאנו את עץ הפתרון לגרף המקורי.

□

איור 2.5 – תהליך הבניה של עץ הפתרון עבור גרף מצומצם



המשמעות היא, כי נוכל במחקר זה להתרכז במציאת פתרונות כלליים לגרפי קשירות, ופתרונות אלו ייצגו פתרונות למשפחות של גרפים.

לכן – מעתה בעבודה זו (אלא אם יצוין אחרת) נעסוק בגרפים מצומצמים בלבד. אליהם נתייחס כגרף הבעיה המקורי.

נבדוק כעת, האם ניתן להכריע את הבעיה מגרף הקשירות.

ב. גרפי קשירות בתצורת עצים

2.5. משפט - אם גרף הקשירות הוא עץ – לבעיה קיים עץ פתרון.

הוכחה:

כל תת-קבוצה מהווה גרף קשיר ולכן קיים לה עץ פורש. ברור כי איחוד עצים אלו – פורש את הגרף המקורי. נותר להוכיח שזה באמת עץ. כלומר שאין יותר מדי קשתות, דבר היכול ליצור מעגלים.

מספיק להוכיח שמספר הקשתות ב T שווה למספר הקודקודים (בגרף המקורי) פחות 1. כלומר ש $E=V-1$ (ראה [3]).

נניח שגרף הקשירות הוא עץ בעל n קודקודים (ולכן $n-1$ קשתות), ו- $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ מייצגים את מספר הקודקודים בכל תת-קבוצה. מלמה 2.2, נובע שכל קודקוד חיתוך נמצא בדיוק בשתי קבוצות. כל קשת בגרף הקשירות מייצגת קודקוד שנספר פעמיים ולכן יש להוריד את מספר הקשתות מסך הקודקודים. בנוסף – כל קודקודי החיתוך הללו הם שונים, כי אילו היה קודקוד שמשותף ליותר משתי קבוצות היה נוצר מעגל בגרף הקשירות. לכן נקבל שמספר הקודקודים בגרף המקורי הוא:

$$\sum_i s_i - (n - 1)$$

נבחן כעת כמה קשתות קיימות באיחוד העצים -

מספר הקשתות בעץ הפורש T הוא (מכיוון שהחיתוך בין תתי-הקבוצות הוא יחיד, ואין קשתות משותפות):

$$\sum_i^n (s_i - 1) = \sum_i^n s_i - n = \left[\sum_i s_i - (n - 1) \right] - 1$$

כיום זה אכן שווה למספר הקודקודים פחות אחד כנדרש.

□

ג. גרפי קשירות מעגליים

2.6. סימון: גרף קשירות מעגלי – נניח שגרף הקשירות מהווה מעגל ונסמן את קודקודי המעגל ב $U_1, U_2, U_3 \dots U_n$. נזכור כי ההנחה הבסיסית בפרק זה היא שמדובר בגרף בעיה בו החיתוכים בין תתי-הקבוצות הם בגודל 1 לכל היותר ביניהן.
כמו כן, נסמן:

$v_{1,2}$ קודקוד החיתוך בין תת-קבוצה U_1 ל- U_2

$v_{2,3}$ קודקוד החיתוך בין תת-קבוצה U_2 ל- U_3

...

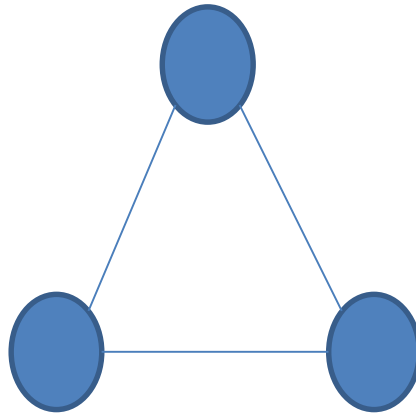
$v_{i,j}$ קודקוד החיתוך בין תת-קבוצה U_i ל- U_j

....

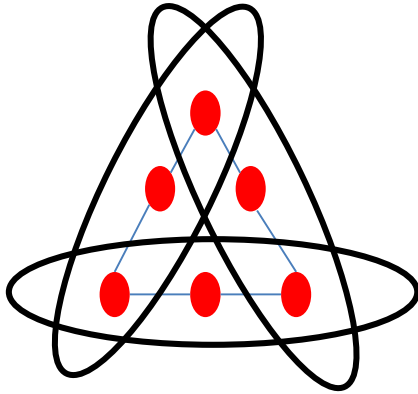
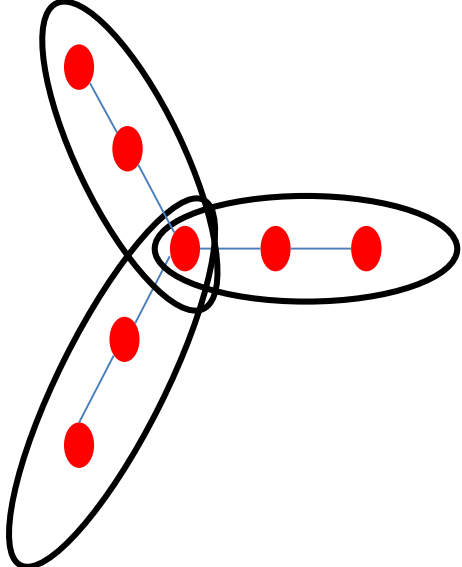
$v_{n,1}$ קודקוד החיתוך בין תת-קבוצה U_n ל- U_1

בשלב הבא נרצה לבחון האם קיים עץ פתרון כאשר גרף הקשירות הוא מעגלי. נתחיל את החקירה עם המעגל הקטן ביותר, כלומר $|G|=3$.

איור 2.6 – גרף קשירות מעגלי באורך 3



נשים לב כי גרף קשירות זה יכול לייצג שני מצבים אפשריים, כמודגם בטבלה הבאה, כאשר עבור אחד מהם קיים עץ פתרון, ועבור השני לא קיים. המסקנה מכך היא שלא ניתן להסיק מגרף קשירות זה אם הבעיה המקורית פתירה או לא.

מצב ב' – לא קיים עץ פתרון	מצב א' – קיים עץ פתרון
	

2.7. טענה: לגרף קשירות שהוא מעגל באורך 3 המייצג גרף בעיה מעגלי (מצב ב' באיור לעיל) – לא קיים פתרון.

הוכחה (למצב ב' באיור): בגרף המקורי יש 6 קודקודים, ולכן לעץ שפורש אותו נדרשות 5 קשתות. מצד שני, כדי לפרוס כל אחת מתתי הקבוצות בגרף, יש צורך ב- $6 = 3 \cdot (3-1)$ קשתות בעץ הפתרון. זאת מכיוון שכל קשת שייכת בדיוק לקבוצה אחת (אחרת יש יותר מקודקוד יחיד בחיתוך, בסתירה לנתון). הקשת העודפת היא זו שיוצרת מעגל.

הוכחה (כללית) – יהי s_i מספר הקודקודים בתת-הקבוצה ה- i . מספר הקודקודים הכולל בגרף המקורי G , המתואר על ידי גרף הקשירות של שלוש תתי-הקבוצות הוא $s_1 + s_2 + s_3 - 3$ כי יש שלושה קודקודים שנספרו פעמיים. לכן מספר הקשתות הנדרש לפרוש גרף כזה על ידי עץ הוא: $s_1 + s_2 + s_3 - 4$.

מצד שני, כדי לפרוס כל אחת מתתי הקבוצות נדרשות

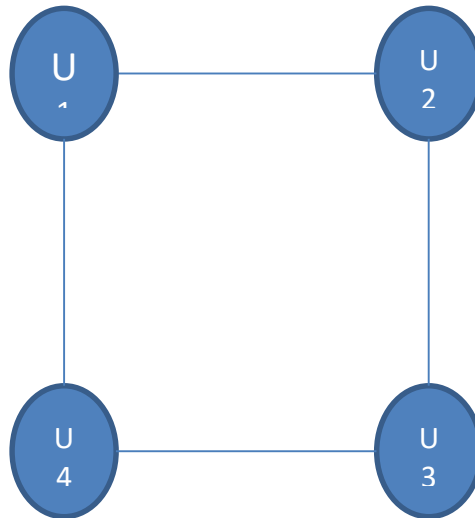
$$(s_1 - 1) + (s_2 - 1) + (s_3 - 1) = s_1 + s_2 + s_3 - 3$$

קשתות. הקשת העודפת היא זו שיוצרת מעגל וגורמת לכך שאין לגרף עץ פתרון.

□

נבדוק כעת גרף קשירות מעגלי בגודל $|G|=4$. נראה שגרף קשירות כזה מייצג גרף בעיה שאין לו עץ פתרון.

איור 2.7 – גרף קשירות מעגלי באורך 4



2.8. משפט: אם גרף הקשירות הוא מעגל פשוט (חסר-מיתרים) בעל ארבעה קודקודים, אזי לגרף המקורי אין פתרון.

הוכחה:

נניח כי קיים לגרף עץ פתרון T.

מלמה 2.2 נקבל כי כל קודקודי החיתוך $v_{1,2}, v_{2,3}, v_{3,4}, v_{4,1}$ חייבים להיות שונים זה מזה, אחרת ישנו קודקוד הנמצא בחיתוך של 3 תתי-קבוצות – כך שהיה נוצר משולש בגרף הקשירות, ובמקרה זה אנו דנים במעגל ללא מיתרים.

מכיוון שאנו מניחים שקיים לגרף עץ פתרון, קיים מסלול יחיד בין $v_{1,2}$ ל $v_{2,3}$ ב-T המוכל ב- U_2 .

בצורה דומה, קיים מסלול יחיד בין $v_{2,3}$ ל $v_{3,4}$ ב-T המוכל ב- U_3 .

בצורה דומה, קיים מסלול יחיד בין $v_{3,4}$ ל $v_{1,4}$ ב-T המוכל ב- U_4 .

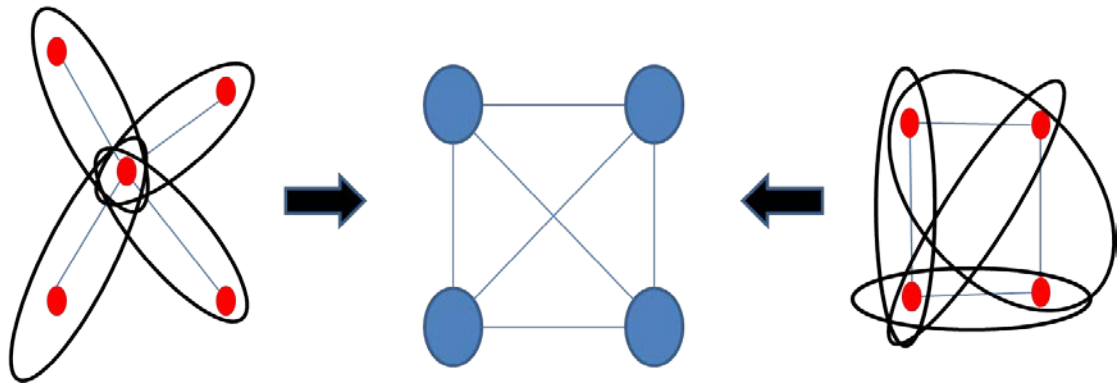
מצד שני, כיון שקיים תת-עץ הפורש את U_1 , קיים מסלול בין קודקוד $v_{4,1}$ לקודקוד $v_{1,2}$ שעובר בלעדית בתת קבוצה U_1 (כי שניהם ב U_1). אך מסלול זה אינו המסלול המקורי שיצרנו בין הקבוצות U_4, U_3, U_2 מכיוון שבין קבוצה U_1 לקבוצה U_3 אין חיתוך. לכן קיים מסלול נוסף בעץ T, בסתירה להנחה שהוא עץ – כלומר חסר מעגלים.

□

אבחנה חשובה: הנקודה העקרונית בגללה לא ניתן היה להכריע האם יש לבעיה פתרון בגרף קשירות שהוא מעגל בעל שלושה קודקודים, נבעה מכך שמעגל בגודל 3 הוא בנוסף גם **קליקה**. נראה כי הבעיה קיימת עבור קליקות בכל גודל שהוא:

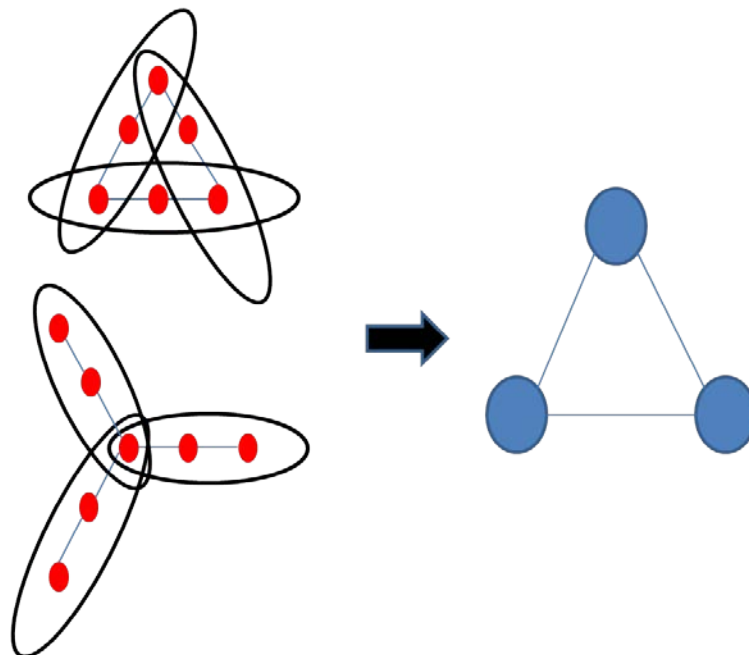
לשני הגרפים באיור הבא יש אותו גרף קשירות. עם זאת, לגרף השמאלי קיים פתרון, בעוד שלגרף הימני אין.

איור 2.8 – גרף קשירות זהה לשני גרפי בעיה. לשמאלי-יש פתרון. לימני-אין



בשלב זה אנו מבינים שהבעיה היא שגרף הקשירות אינו עדין מספיק כדי "לתפוס" את ההבדלים בין גרפים שלהם יש גרף קשירות זהה, כפי שרואים באיור הבא:

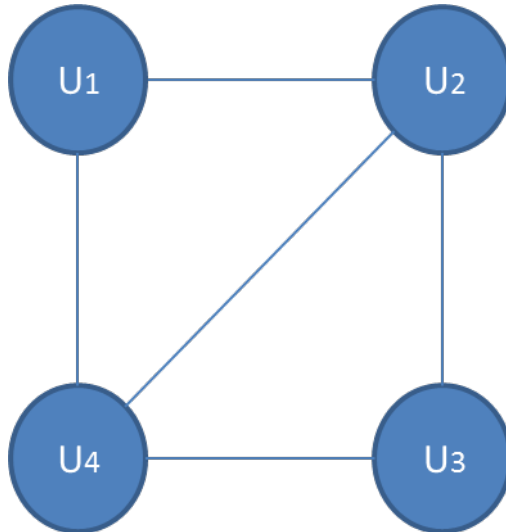
איור 2.9 – גרף קשירות זהה לשני גרפי בעיה. לתחתון-יש פתרון. לעליון-אין



נראה כעת, כי גם מעגלים עם מיתרים ניתנים להכרעה, כל עוד אינם קליקה. ראשית נוכיח מקרה פרטי עבור גרף קשירות שהוא מעגל עם ארבעה קודקודים ומיתר אחד, על מנת להמחיש את עקרון ההוכחה. לאחר מכן נכליל את ההוכחה, למעגלים בגדלים שונים ועם מספר מיתרים.

2.9. טענה: גרף קשירות שהוא מעגל בעל ארבעה קודקודים עם מיתר יחיד מייצג גרף שאין לו עץ פתרון.

איור 2.10 – גרף קשירות מעגלי באורך 4 עם מיתר יחיד



- **טענת עזר:** או ש $v_{12} \neq v_{14}$ או ש $v_{23} \neq v_{34}$
- **הוכחה:** אם $v_{12} = v_{14}$ אז בהכרח שניהם שווים ל v_{24} כי $v_{12} \in U_1 \cap U_2$ וגם $v_{14} \in U_1 \cap U_4$ ומכיון שהחיתוך יחיד נקבל – $v_{14} = v_{12} \in U_2 \cap U_4 = \{v_{24}\}$
 מצד שני, אם $v_{23} = v_{34}$ אז שניהם שווים ל v_{24} , מאותם שיקולים. יוצא כי U_1 ו U_3 אינם זרים, כי $v_{12} = v_{34} \in U_3 \cap U_1$. לכן היתה צריכה להיות קשת ביניהם בסתירה לנתון.

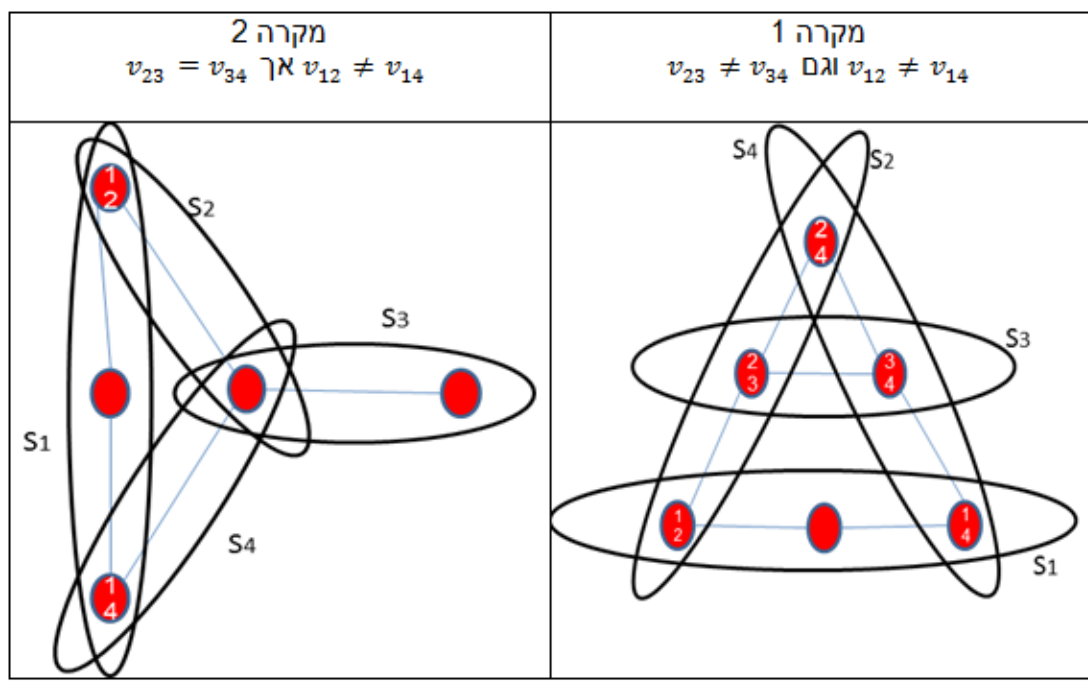
הוכחת הטענה:

נניח שקיים לגרף המקורי עץ פתרון. כלומר קיים לו עץ פורש T, שפורש גם כל אחת מתתי-הקבוצות. נניח, בעזרת טענת העזר, בלי הגבלת הכלליות ש $v_{12} \neq v_{14}$. מצד אחד, קיים מסלול ב-T מ v_{12} ל v_{14} שעובר בתוך U_1 (כמסלול פנימי בתוך תת-הקבוצה).

מצד שני, קיים ב-T מסלול $v_{12} \rightarrow v_{23} \rightarrow v_{34} \rightarrow v_{41}$ שעובר גם דרך U_3 . שני מסלולים אלו חייבים להיות שונים כי $U_1 \cap U_3 = \emptyset$. מצאנו שני מסלולים שונים בין v_{12} ל v_{14} ב-T, בסתירה להנחה שהוא עץ. נשים לב שהוכחה זו נכונה, בין אם $v_{23} \neq v_{34}$ ובין אם $v_{23} = v_{34}$.

□

איור 2.11 – המחשת שני המקרים בהוכחה



נשים לב שבמקרה 2, המסלול $v_{23} \rightarrow v_{34}$ הוא מנוון כי $v_{23} = v_{34}$.

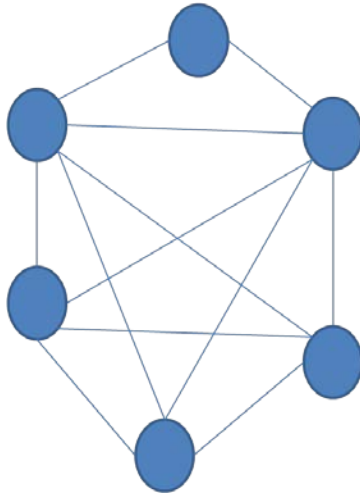
כעת, נכליל את התוצאה האחרונה, ונראה כי כל גרף קשירות שהוא מעגל (בכל גודל הגדול מ 3) הכולל מספר כלשהו של מיתרים ואינו קליקה – מייצג גרף בעיה שאין לו עץ פתרון.

2.10 הגדרה: מעגל קליק חסר – מעגל שאיננו קליקה, כלומר שלפחות אחד ממיתריו הפנימיים חסר.
 הערה: מעגל באורך 3 – הוא בהכרח גם קליקה.
 אם $S_1, S_2 \dots S_n$ הן תתי-הקבוצות, אז גרף הקשירות הוא מעגל קליק חסר אם:

$$S_i \cap S_{(i+1) \bmod n} = \{v_{i,i+1}\}, \quad i = 1, 2, 3 \dots n$$

$$\exists i_0, j_0 \text{ s.t. } S_{i_0} \cap S_{j_0} = \emptyset, \quad j_0 > i_0 + 1$$

איור 2.12 – דוגמה למעגל קליק חסר



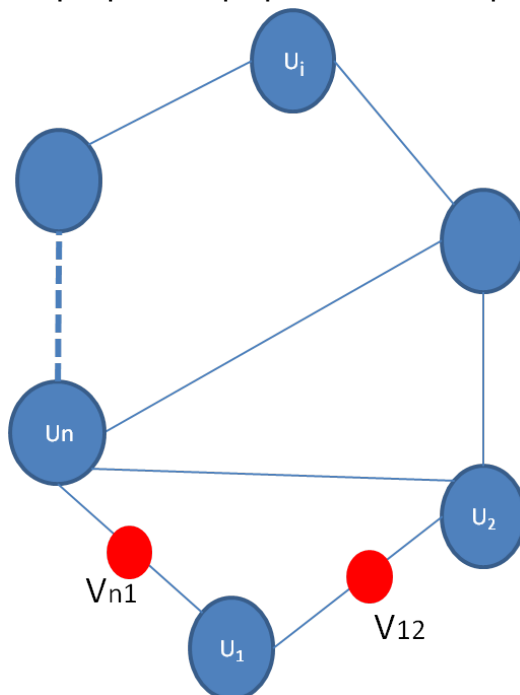
2.11. טענה: אם גרף הקשירות הוא מעגל קליק חסר - אזי לגרף המקורי אין פתרון.

הוכחה:

מכיון שגרף הקשירות אינו קליקה, קיימים (לפחות) שני קודקודים שאין ביניהם קשת. בלי הגבלת הכלליות נסמן אותם ב U_1 וב- U_i , $2 < i < n - 1$ (ראה איור). נתבונן בשכני U_1 , קודקודים- U_2, U_n (שונים מ U_i) ועל קודקודי החיתוך v_{12}, v_{n1} .

איור 2.13 – תיאור סכמטי של גרף הקשירות

קודקוד אדום על קשת – מבטא את קודקוד החיתוך בין שתי תתי-הקבוצות



נניח בשלילה כי קיים לגרף עץ פתרון, כלומר קיים עץ הפורש את הגרף המקורי, כך שכל תת-קבוצה נפרשת על ידי תת-עץ.

לכן, קיים מסלול ב-T המחבר את v_{12}, v_{n1} שעובר בלעדית בתוך קבוצה U_1 . (נשים לב – יתכן ש $v_{12} = v_{n1}$ וזהו מסלול מנוון).

מצד שני, קיים מסלול מ v_{12} ל v_{n1} שעובר דרך קבוצה U_i כי:

- קיים מסלול בעץ מ v_{12} ל v_{23} שעובר דרך קבוצה U_2
- קיים מסלול בעץ מ v_{23} ל v_{34} שעובר דרך קבוצה U_3
- ...
- קיים מסלול בעץ מ $v_{i-1,i}$ ל $v_{i,i+1}$ שעובר דרך קבוצה U_i
- ...
- קיים מסלול בעץ מ $v_{n-1,n}$ ל $v_{n,1}$ שעובר דרך קבוצה U_n

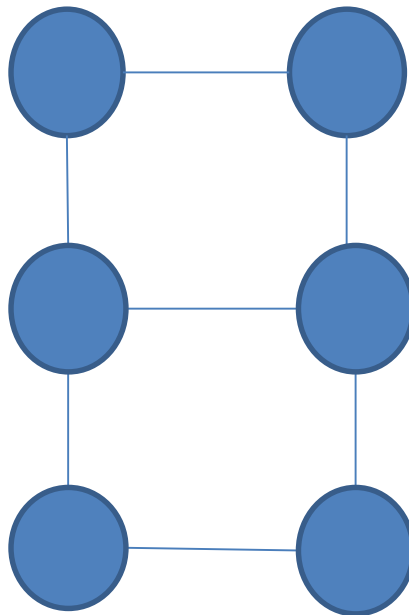
מכיוון שהקבוצות U_1 ו- U_i הן זרות, בהכרח מסלול זה שונה מהמסלול הקודם.

- אם $v_{12} \neq v_{n1}$ אז יש לנו שני מסלולים שונים ביניהם – דבר היוצר מעגל, בסתירה לכך ש-T הוא עץ.
- אם $v_{12} = v_{n1}$ אז המסלול השני הבלתי מנוון שעובר דרך U_i – יוצר מעגל. סתירה, ולכן הטענה מוכחת.

□

השלב הבא הוא להכליל טענה זו גם לגרף שמכיל מעגל קליק חסר.

איור 2.14 – גרף קשירות המכיל מעגל קליק חסר



2.12. טענה: אם גרף הקשירות מכיל מעגל קליק חסר - אזי לגרף המקורי אין פתרון.

הוכחה

ההוכחה זזה להוכחה של הטענה הקודמת (טענה 2.11). בוחרים מגרף הקשירות את המעגל (כתת-גרף) ומראים שאין פתרון בגרף המקורי שהוא מייצג, ולכן גם לגרף כולו אין פתרון.

□

ד. גרפים רדודים

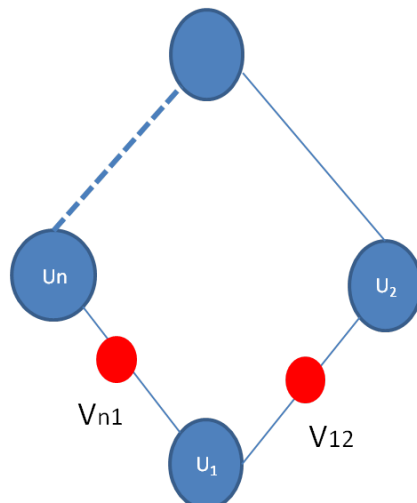
ראינו כי גרף הקשירות אינו עדין מספיק על מנת להתמודד עם קליקות. על מנת להתמודד עם הבעיה הנוצרת מקליקות, ניתן, בשלב ראשון, לפתור גרפי בעיה פשוטים יותר, בהם כל קודקוד שייך לשתי קבוצות לכל היותר.

2.13. הגדרה: גרף רדוד – גרף שכל קודקוד בו שייך לשתי קבוצות לכל היותר. (כזכור – אנו עדיין תחת ההנחה שכל החיתוכים הם בגודל 1.)

2.14. טענה: יהי G גרף רדוד. אם גרף הקשירות של G מכיל מעגל, אזי לגרף המקורי אין עץ פתרון. (נשים לב שכאן אין דרישות על אורך המעגל או על היותו קליקה).

הוכחה: כל קשת בגרף הקשירות מייצגת קודקוד חיתוך בין שתי קבוצות בגרף המקורי. מכיוון שכל קודקוד שייך לכל היותר לשתי קבוצות, כל קשת מתאימה לקודקוד שונה.

איור 2.15 – גרף הקשירות של גרף בעיה רדוד



נסמן את קודקודי המעגל בגרף הקשירות ב $U_1, U_2, U_3 \dots U_n$, ואת קודקודי החיתוך ב v_{12}, \dots, v_{n1} .
 נניח בשלילה כי קיים לגרף עץ פתרון, כלומר קיים עץ הפורש את הגרף המקורי, כך שכל תת קבוצה נפרשת על ידי תת-עץ.
 לכן, קיים מסלול בגרף המקורי המחבר את v_{n1}, v_{12} שעובר בלעדית בתוך קבוצה U_1 .

מצד שני, קיים מסלול נוסף המחבר קודקודים אלה כי:

- קיים מסלול בעץ מ v_{12} ל v_{23} שעובר רק דרך קבוצה U_2
- קיים מסלול בעץ מ v_{23} ל v_{34} שעובר רק דרך קבוצה U_3
- ...
- קיים מסלול בעץ מ $v_{n-1,n}$ ל $v_{n,1}$ שעובר רק דרך קבוצה U_n

כאמור, מכיוון שכל קודקוד שייך לכל היותר לשתי קבוצות, כל קשת מתאימה לקודקוד שונה, ולכן $v_{n1}, v_{12}, v_{23}, v_{34} \dots$ כולם קודקודים שונים. קיבלנו שקיים מעגל בפתרון, בסתירה להנחה.

□

ה. תוצאות

נזכור כי כל התוצאות הן תחת ההנחה שגודל החיתוך בין הקבוצות הוא לכל היותר 1.

נסכם את התוצאות שקיבלנו בפרק זה.

עבור גרפים רגילים:

1. אם גרף הקשירות הוא עץ – לגרף הבעיה קיים עץ פתרון.
2. אם גרף הקשירות מכיל מעגל קליק חסר - לגרף הבעיה אין עץ פתרון.
3. אם בגרף הקשירות כל מעגל הוא קליקה – לא ניתן להכריע.

עבור גרפים רדודים:

1. אם גרף הקשירות מכיל מעגלים – לגרף הבעיה אין עץ פתרון.
קבלנו תנאי חד-משמעי: לגרף הבעיה קיים עץ פתרון אם ורק אם גרף הקשירות הוא עץ.

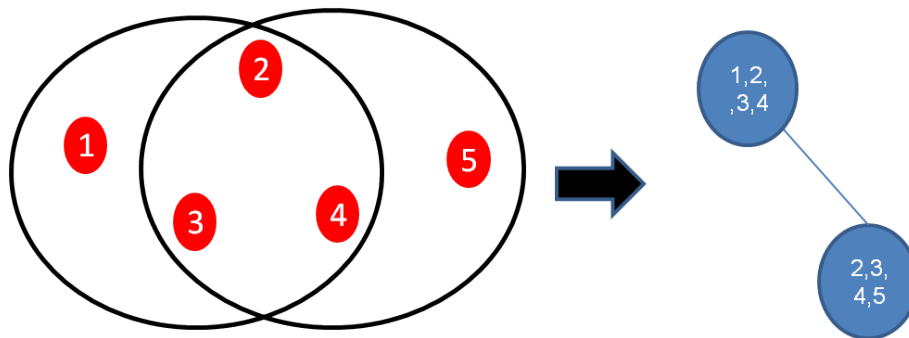
פרק 3 – תנאים להכרעה - תתי-קבוצות עם חיתוך לא מוגבל

א. גרפי קשירות בתצורת עץ

בשלב הבא, נחקור גרפי בעיה בהם יתכן כי החיתוך בין תתי-הקבוצות יכול להכיל גם מספר קודקודים גדול מ-1.

באיור הבא ניתן לראות דוגמה של גרף בעיה, עם שתי תתי-קבוצות, ואת גרף הקשירות שלו.

איור 3.1 – גרף בעיה עם חיתוך של שלושה קודקודים



גם כאן, נרצה להכריע האם יש פתרון לבעיה דרך גרף הקשירות.

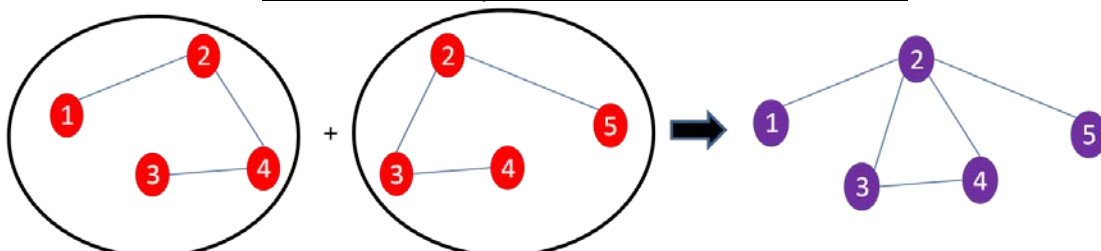
3.1. משפט – אם גרף הקשירות הוא עץ - אז לגרף המקורי יש עץ פתרון.

הערה:

בפרק הקודם, בו עסקנו במקרה של חיתוך יחיד בין תתי-הקבוצות, יש לנו משפט דומה:

משפט 2.5 טוען, כי במקרים שגודל החיתוך בין תתי-הקבוצות הוא לכל היותר 1, אם גרף הקשירות הוא עץ – לבעיה קיים עץ פתרון. בהוכחת המשפט טענו כי כל תת-קבוצה היא גרף קשיר ולכן קיים לה עץ פורש. ברור כי איחוד עצים אלו פורש את הגרף המקורי. הוכחנו כי הגרף שנוצר הוא עץ. במקרה שלנו, אם נמשיך את הדוגמה, (ראה איור 3.2) נראה כי יכולים להיווצר מצבים שאיחוד תתי-העצים ייצור מעגלים! לכן ההוכחה במקרה זה תהיה מעודנת יותר ותצריך בניה זהירה של תתי-עצים אלו.

איור 3.2 – איחוד עצים של תתי-הקבוצות היוצר מעגל



הוכחה:

לצורך ההוכחה, נעזר בלמה 2.2 אשר נכונה גם למקרה זה:
אם בגרף הבעיה קיים קודקוד ששייך ליותר משתי קבוצות – אז בגרף הקשירות קיים משולש. הניסוח השקול לכך הוא: שאם אין משולש בגרף הקשירות – כל קודקוד בגרף הבעיה שייך לכל היותר לשתי קבוצות. לכן, ניתן להסיק, שכאשר גרף הקשירות הוא עץ, כל קודקוד חיתוך מופיע בדיוק בשתי קבוצות.

מהלמה נובע, שכל הקודקודים מתחלקים לקבוצות זרות באופן הבא:

$$K_{ii} = \{\text{קודקודים השייכים לקבוצה } S_i \text{ בלבד}\}$$

$$K_{ij} = \{\text{קודקודי } S_i \cap S_j, (i \neq j)\}$$

חשוב לשים לב: יתכן שקבוצות אלו ריקות.

כרגיל, נסמן באות גדולה את הקבוצה, ובאות הקטנה התואמת את גודל הקבוצה –

$$s_i = |S_i|$$

$$k_{ij} = |K_{ij}|$$

ונקבל:

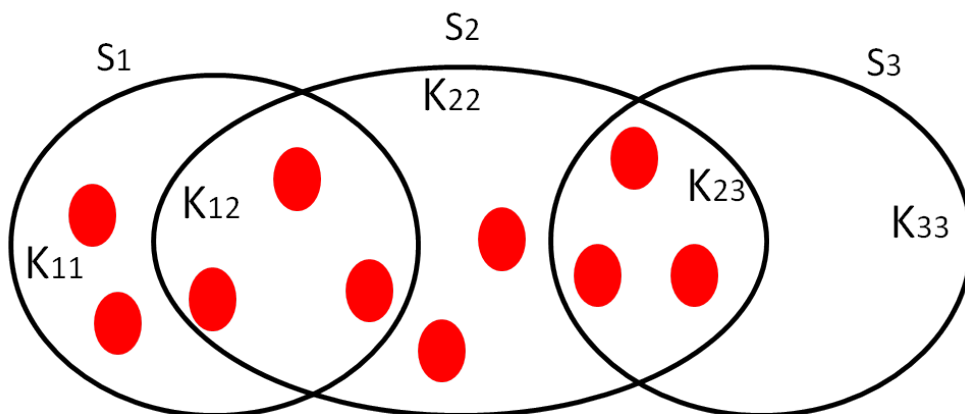
$$S_i = K_{i1} \cup K_{i2} \cup \dots \cup K_{in}$$

$$s_i = |S_i| = k_{i1} + k_{i2} + \dots + k_{in}$$

$$s_i = \sum_{j=1}^n k_{ij}$$

באיור הבא, מוצגת דוגמה אשר תשמש להמחשה במהלך ההוכחה:

איור 3.3 – סימון חלוקת תתי-קבוצות לקבוצות זרות



כעת, בנה עץ פורש של כל הגרף, שפורש גם כל אחת מתתי-קבוצות.

שלב (א):

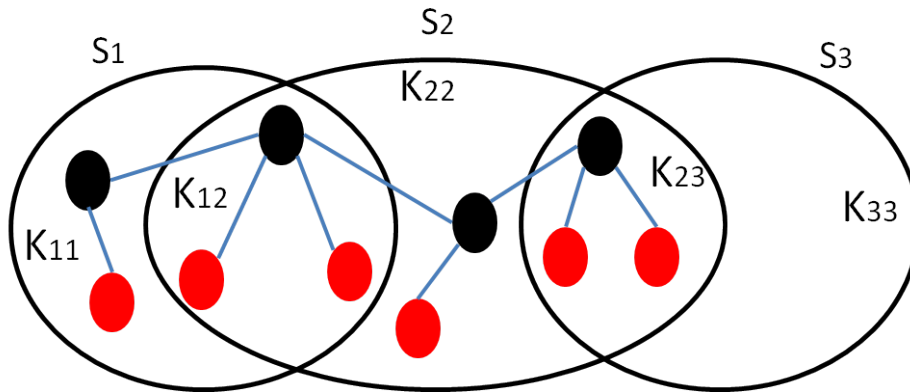
עבור כל קבוצה K_{ij} שאינה ריקה נבחר עץ פורש כלשהו, ונבחר קודקוד שרירותי כנציג.

מספר הקשתות בעץ זה: $k_{ij} - 1$.

שלב (ב):

עבור כל קבוצה S_i , נתבונן בחלקי-הקבוצה- K_{ij} ($1 \leq j \leq n$), שאינן ריקות ונבחר מכל אחת מהן את הנציג שבחרנו בשלב (א). על נציגים אלו ניצור עץ פורש שרירותי (מסלול, למשל).

איור 3.4 – תהליך יצירת העץ תוך שימוש בנציגים



נסמן את מספר הקבוצות הלא-ריקות המרכיבות את S_i ב t_i . מספר הקשתות בעץ זה: $t_i - 1$, עבור כל קבוצה S_i .

נשים לב שהקשתות שהוספנו בשלב (ב) שונות מהקשתות שנוספו בשלב (א), כיון שכל קשת בשלב (ב), בין שני K_{ij} שונים.

קיבלנו גרף קשיר הפורש את כל תתי-הקבוצות S_i , ומכיוון שגרף הקשירות קשיר, הוא פורש גם את כל הגרף המקורי.

נוכיח כעת שהגרף שנוצר הוא עץ פורש (כלומר שאין בו מעגלים) על כל תת-קבוצה S_i .

נראה שמספר הקשתות בין קודקודי S_i הוא $s_i - 1$:

נניח ש $S_i = K_{ij_1} \cup K_{ij_2} \cup \dots \cup K_{ij_{t_i}}$ הם t_i המרכיבים הלא-ריקים של S_i . מספר הקשתות בעץ:

$$= (k_{ij_1} - 1) + (k_{ij_2} - 1) + \dots + (t_i - 1)$$

כאשר $t_i - 1$ הוא מספר הקשתות בין המרכיבים הזרים בתת-הקבוצה S_i .

לפי הנחתנו קיימים t_i מרכיבים זרים.

לכן, סכום זה שווה ל $s_i - 1$ כנדרש:

$$= (k_{ij_1} + k_{ij_2} + \dots) - t_i + t_i - 1 = s_i - 1$$

כעת נותר להוכיח כי הגרף שיצרנו הוא עץ פורש של כל גרף הבעיה. גם כאן, נסתמך על התוצאה שמספיק להוכיח כי מספר הקשתות שווה למספר הקודקודים פחות אחד.

מספר הקודקודים בגרף הבעיה המקורי הוא:

$$\sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} k_{ij}$$

כאן אנו מסתמכים על הלמה שכל קודקוד חיתוך מופיע רק בשתי קבוצות והעובדה שהחלוקה ל k_{ij} היא חלוקה של קבוצות זרות!

מספר הקשתות בתת-הגרף שבנינו:

לפי טענת העזר, בכל קבוצה S_i יש $s_i - 1$ קשתות. מתוכם, הקשתות שבקבוצות החיתוך K_{ij} נספרו בדיוק פעמיים (כי כל חיתוך שייך בדיוק לשתי קבוצות) ובכל תת קבוצה כזו יש $k_{ij} - 1$ קשתות, ולכן נדרש לחסרן:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (s_i - 1) - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j, k_{ij} \neq 0} (k_{ij} - 1) = \\ \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n 1 \right) - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{i < j, k_{ij} \neq 0} k_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j, k_{ij} \neq 0} 1 \right) \end{aligned}$$

נפשט את המרכיבים השונים בביטוי זה:

- ברור כי $(\sum_{i=1}^n 1) = n$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{i < j, k_{ij} \neq 0} k_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} k_{ij}$ כיון האברים הנוספים שסוכמים אותם – כולם 0.
- $\sum_{i=1}^n \sum_{i < j, k_{ij} \neq 0} 1 = n - 1$

סכום זה "סופר" את מספר קבוצות החיתוך הלא-ריקות. כלומר, בדיוק מספר הקשתות בגרף הקשירות. ומכיוון שגרף הקשירות שלנו הוא עץ – הרי שסכום זה שווה ל $n - 1$.

לאחר הצבה נקבל:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n s_i \right) - n - \left(\sum_{i=1}^n \sum_{i < j} k_{ij} - (n - 1) \right) \\ = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} k_{ij} - n + (n - 1) = \sum_{i=1}^n s_i - \sum_{i=1}^n \sum_{i < j} k_{ij} - 1 \end{aligned}$$

קיבלנו כי מספר הקשתות קטן באחד ממספר הקודקודים כנדרש. בכך הושלמה הוכחת המשפט.

□

ב. גרפים רדודים

בדומה לפרק הקודם, גם כאן, על מנת לנסות ולהתמודד עם הבעיה הנוצרת מקליקות בגרפי הקשירות, ננסה לפתור את הבעיה על ידי הנחה כי אנו עוסקים בגרפי בעיה מסוג גרפים רדודים כמוגדר ב – 2.13.

3.2. טענה: יהי G גרף רדוד. אם גרף הקשירות שלו מכיל מעגל - אזי ל G אין עץ פתרון.

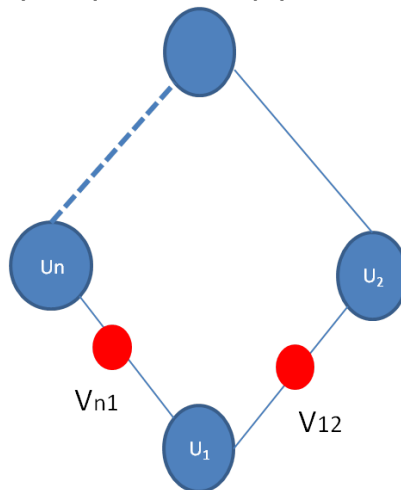
הוכחה

מספיק להראות שאין פתרון עבור המעגל – ומכאן שגם אין פתרון לגרף כולו. נסמן את קודקודי המעגל בגרף הקשירות ב $U_1, U_2, U_3 \dots U_n$, ונגדיר:

$$U_i \cap U_{(i+1) \bmod n} = V_{i,i+1}$$

נשים לב שהפעם $V_{i,i+1}$ היא קבוצת חיתוך. כלומר יכולה להיות קבוצה של יותר מקודקוד אחד.

איור 3.5 – סימון קבוצות החיתוך בגרף הקשירות



מכיוון שכל קודקוד שייך לכל היותר לשתי קבוצות, לא יכול להיות קודקוד ששייך לשתי קבוצות חיתוך שונות. לכן החיתוכים בין קבוצות החיתוך $V_{i,i+1}$ הם ריקים. מכיוון שהחיתוך בין תתי-הקבוצות יכול להכיל מספר קודקודים, נבחר קודקוד אחד שרירותי מכל קבוצה $V_{i,i+1}$ ונסמן אותו ב- $v_{i,i+1}$. לאור האמור לעיל, בחרנו n קודקודים שונים בגרף המקורי.

נניח בשלילה כי קיים לגרף עץ פתרון, כלומר קיים עץ T הפורש את הגרף המקורי וגם כל אחת מתתי-הקבוצות.

לכן, קיים מסלול בגרף המקורי המחבר את v_{n1}, v_{12} שעובר בלעדית בתוך קבוצה U_1 .

מצד שני, קיים ביניהם מסלול נוסף כי:

- קיים מסלול בעץ T מ v_{12} ל v_{23} שעובר דרך קבוצה U_2 , כי U_2 נפרש על ידי תת-עץ של T .

- קיים מסלול בעץ מ v_{23} ל v_{34} שעובר דרך קבוצה U_3 כי U_3 נפרש על ידי תת-עץ של T .
- ...
- קיים מסלול בעץ מ $v_{n-1,n}$ ל $v_{n,1}$ שעובר דרך קבוצה U_n כי U_n נפרש על ידי תת-עץ של T .

מכיוון שהקודקודים $v_{23}, v_{34}, \dots, v_{n-1,n}$, אינם שייכים ל U_1 , בהכרח מסלול זה שונה מהמסלול הקודם. כלומר קיימים שני מסלולים שונים.

לכן אם G גרף רדוד, וגרף הקשירות שלו מכיל מעגל - אזי ל G אין עץ פתרון.

□

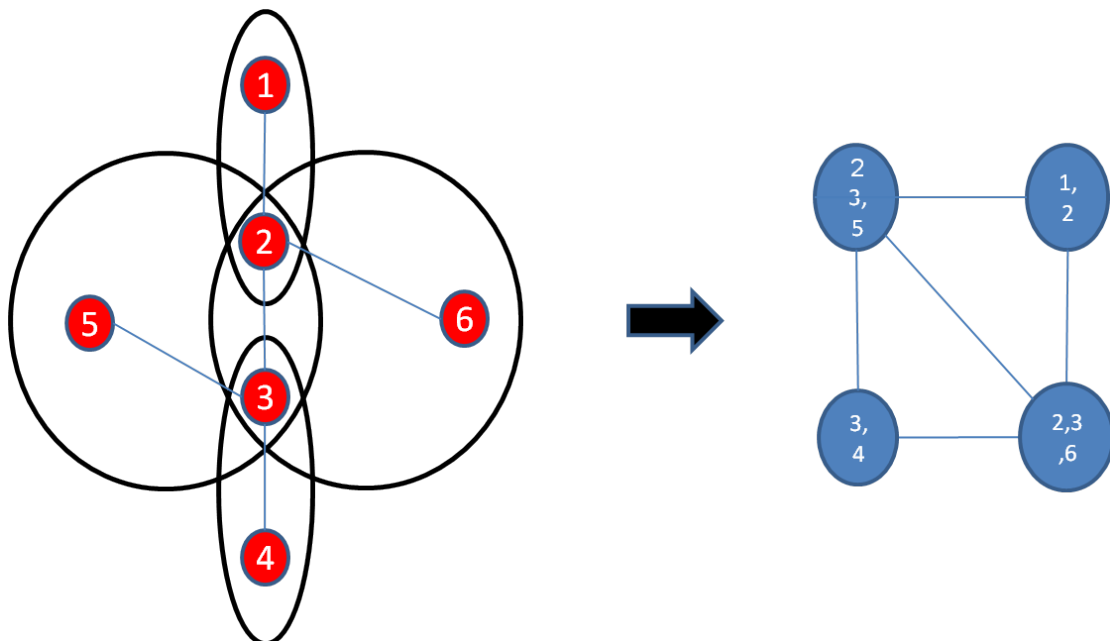
הערה חשובה:

נשים לב שהתנאי שהגרף המקורי חייב להיות רדוד הוא הכרחי להוכחה. בניגוד למקרה של חיתוכים של קודקוד יחיד, שבו משפט 2.11 טוען שניתן להכריע את הבעיה אם גרף הקשירות מכיל מעגל שאינו קליקה. בדוגמה זו ניתן לראות כי בגרף רגיל המכיל מעגל – ההוכחה לא "עובדת" גם אם המעגל אינו קליקה!

איור 3.6 –

גרף בעיה לא רדוד עם גרף קשירות שהינו מעגל קליק חסר אך קיים לו עץ פתרון

*עץ הפתרון מסומן בכחול בגרף השמאלי



נקודת הכשל של הוכחת משפט 2.11 היא בהערה הבאה "(נשים לב – יתכן ש $v_{12} = v_{n1}$ וזהו מסלול מנוון)". במקרה של חיתוך יחיד אין בעיה. יכול להיות שכל המשולש (למשל –

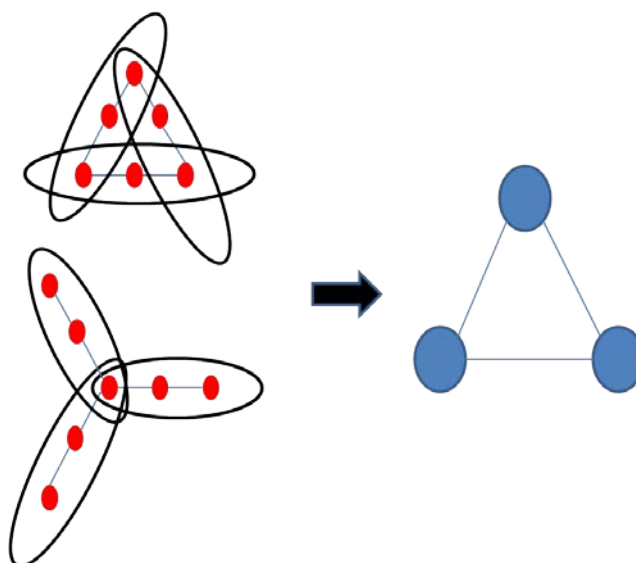
השמאלי תחתון) מתנוון לאותו קודקוד, אבל ההוכחה עדיין תופסת, כי יש מסלול נוסף שעובר דרך המסלול של המשולש השני (באיור – משולש ימני עליון). אבל במקרה של חיתוך גדול יותר בין הקבוצות יתכן שנוצרים שני משולשים מנוונים, שכל אחד מהם מייצג קודקוד אחד אחר, ושניהם "יושבים" על הקו האלכסוני. זה לא יכול לקרות במקרה של חיתוך יחיד, כי אז זה היה אותו קודקוד והיתה נוצרת קליקה.

פרק 4 – גרף קשירות אדום-שחור

א. הגדרה

כפי שראינו בפרקים הקודמים, גרף הקשירות אינו מכיל מספיק מידע על גרף הבעיה המקורי, ולכן אינו "רגיש" מספיק - דבר שאילץ אותנו להדחק לגרפים הרדודים. האיור הבא מדגים את המקרה הבסיסי של שני גרפים להם יש את אותו גרף קשירות. העובדה שלגרף התחתון קיים פתרון ולעיליון לא, מגבירה את הבעיה.

איור 4.1 – גרפי בעיה עם גרף קשירות זהה



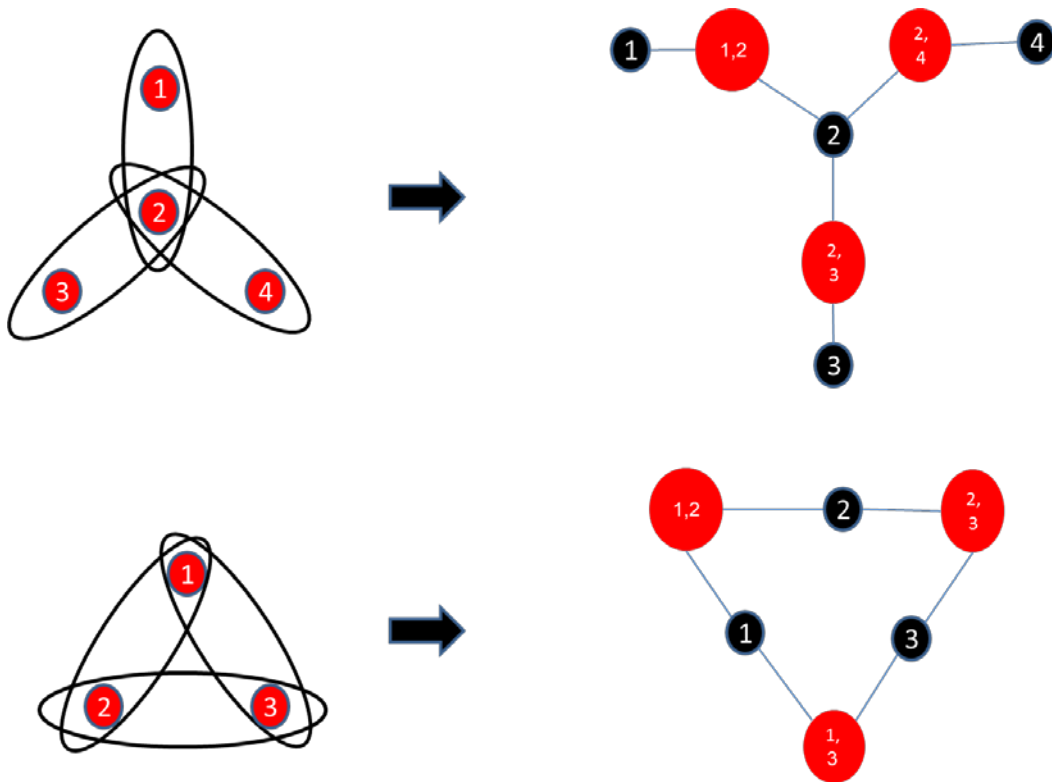
על מנת לנסות ולפתור את הבעיה הזו, נגדיר את גרף הקשירות מסוג חדש – גרף דו צדדי, "אדום-שחור". כפי שנראה, צורת ההצגה הזו תכיל יותר מידע על גרף הבעיה.

4.1. הגדרה: גרף קשירות אדום-שחור – יהי HG היפרגרף הבעיה המקורי.

1. לכל $v \in V$ נגדיר קודקוד שחור – "קודקוד חיתוך".
2. לכל S_i נגדיר קודקוד אדום U_i – "קודקוד קבוצה".
3. קיימת קשת בין קודקוד אדום לשחור אם $v \in S$.
4. אורך מסלול \ מעגל – מספר הקודקודים האדומים במסלול \ מעגל. (נדגיש – קודקודים שחורים אינם נספרים).

נראה כעת איך נראה גרף הקשירות החדש עבור המקרה הבעייתי מאיור 4.1:

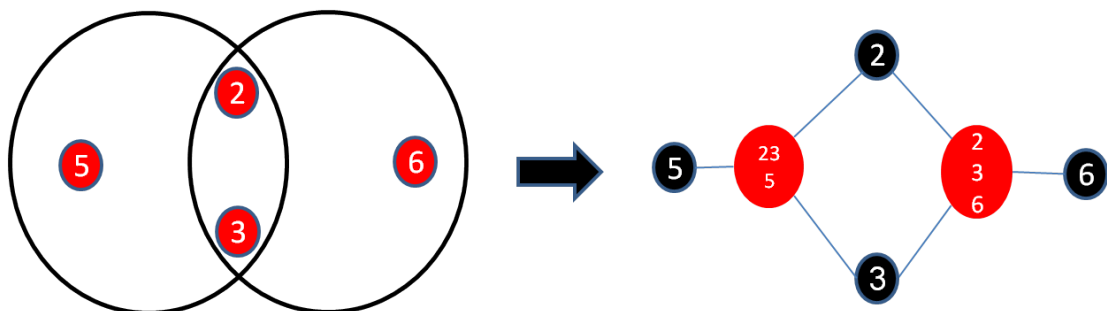
איור 4.2 – גרף קשירות אדום-שחור



גרף קשירות אדום-שחור – סימונים ותכונות

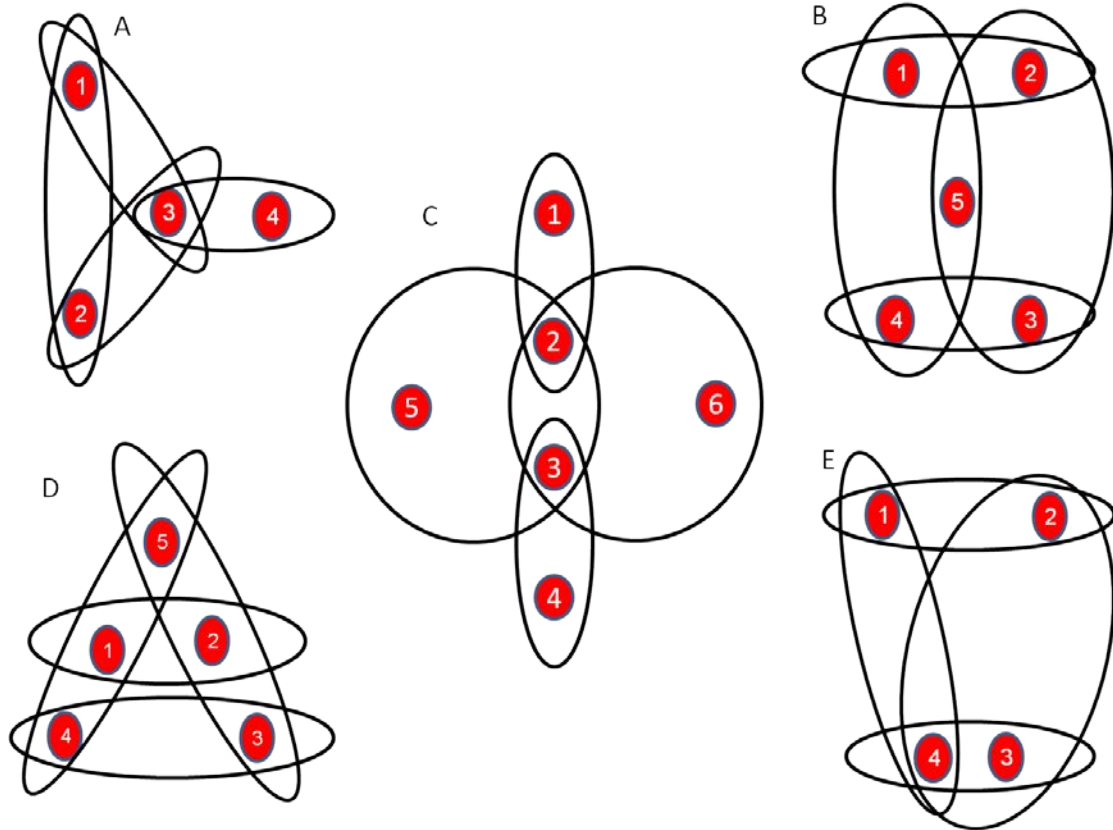
- קודקוד בגרף הבעיה המקורי – מיוצג על ידי קודקוד שחור, קבוצה – על ידי קודקוד אדום.
- דרגת קודקוד קבוצה S_i בגרף-הקשירות (אדום) = גודל הקבוצה S_i בגרף המקורי.
- דרגת קודקוד חיתוך v בגרף הקשירות (שחור) = בכמה קבוצות מוכל קודקוד v בגרף המקורי.
- קשת בגרף הקשירות המקורי – סדרת קודקודים אדום-שחור-אדום בגרף הקשירות הדו-צדדי.
- מעגל בגודל 2 משמעותו קבוצת חיתוך בגודל 2 או יותר בין תתי-קבוצות, כמודגם באיור 4.3.
- נשים לב כי זהו בעצם גרף הקשירות שהגדרנו עם תוספת המידע של הקודקודים שלא היו מוצגים בגרף הקשירות הבסיסי.

איור 4.3 – דוגמה למעגל באורך 2



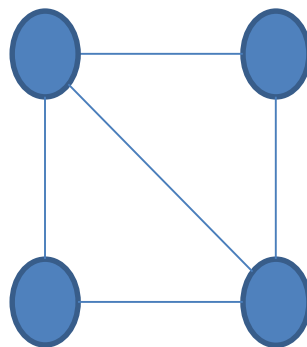
בשלב הבא, נתבונן במקרה מעט יותר מורכב. נתבונן בדוגמאות הבאות, בהן לכל גרפי הבעיה המקוריים יש את אותו גרף קשירות.

איור 4.4 – אוסף גרפי בעיה בעלי ארבע תתי-קבוצות



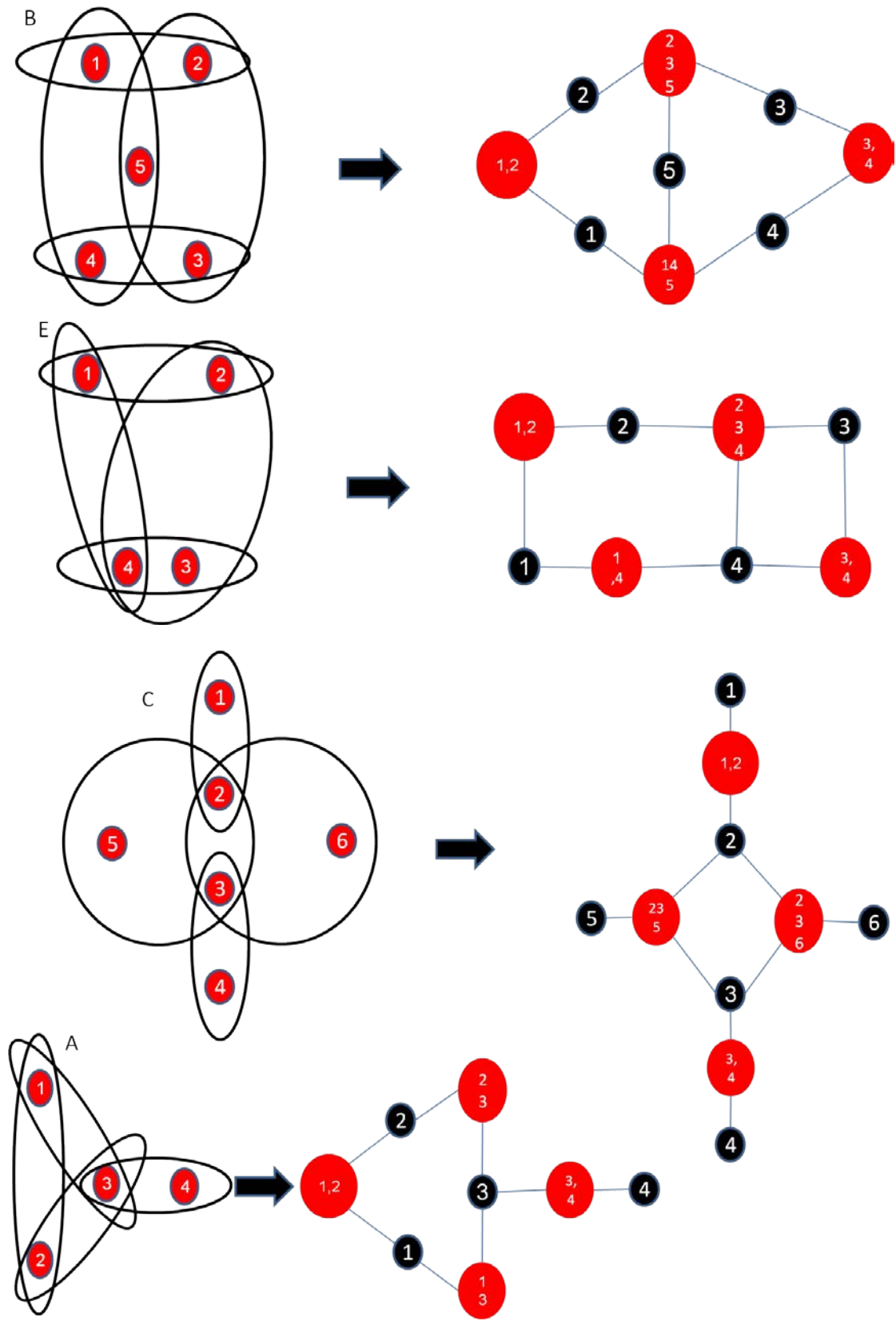
לכל גרפי הבעיה המוצגים באיור 4.4 יש את אותו גרף קשירות כמוצג באיור 4.5:

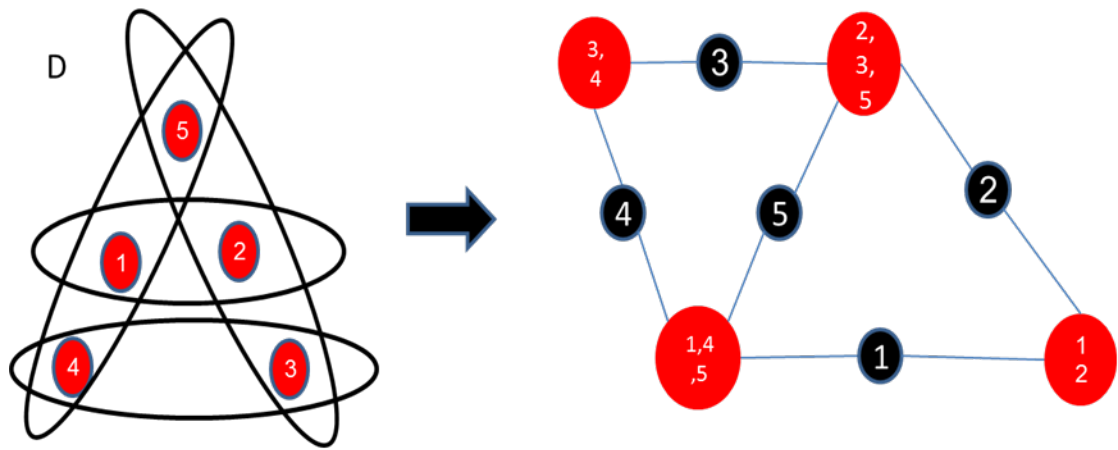
איור 4.5 – גרף הקשירות התואם



עם זאת, גרף הקשירות האדום-שחור שלהם שונה מאד, כמודגם באיור 4.6:

איור 4.6 – גרפי הבעיה וגרף הקשירות האדום-שחור שחור התואם





ב. גרף קשירות אדום-שחור מצומצם

כזכור, הנחנו בתחילת העבודה כי נעסוק רק בגרפי בעיה מצומצמים, כי כל פתרון של גרף בעיה מקורי מצומצם גוזר פתרון לגרף המורחב.

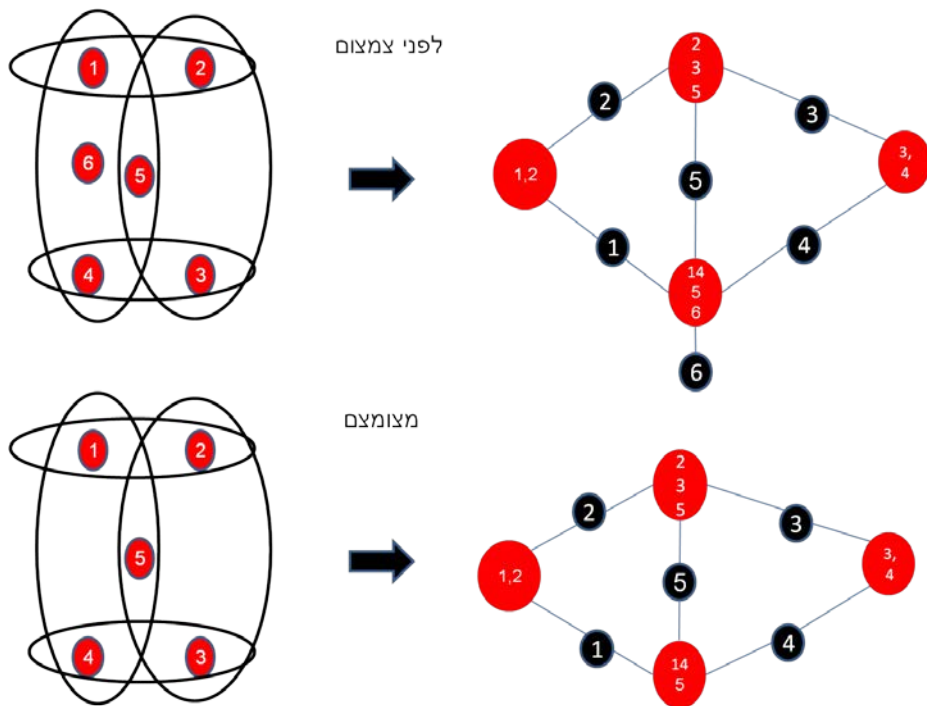
נביא שוב את הגדרה 2.3 של גרף מצומצם מפרק 2:

הגדרה: גרף מצומצם – הגרף המקורי לאחר מחיקת כל הקודקודים ששייכים לתת קבוצה יחידה. כלומר, קבוצת הקודקודים כוללת:

$$V' = \{v \in V \mid d(v) > 1\}$$

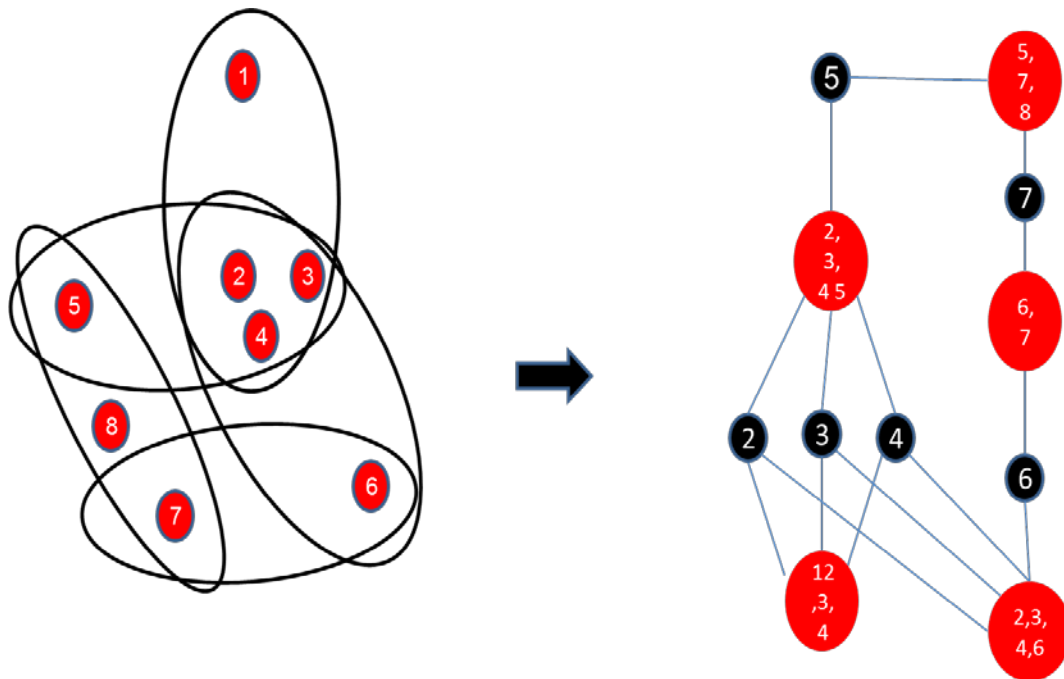
המשמעות של הצמצום בגרף אדום-שחור היא שאין בגרף הקשירות עלים שחורים, כלומר עלים המייצגים קודקודי חיתוך, כמודגם באיור הבא:

איור 4.7 – גרף קשירות אדום-שחור לפני ואחרי הצמצום



נשים לב כי ההגדרה המקורית של הגרף המצומצם אינה מוחקת קודקודים אשר נמצאים באותו חיתוך של תתי-קבוצות כמודגם באיור הבא:

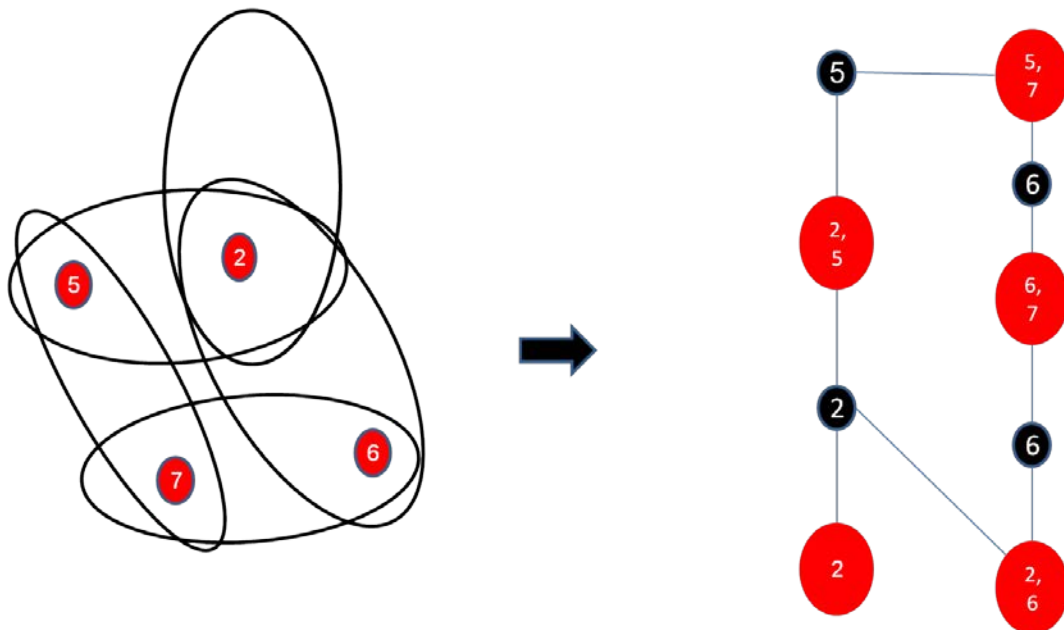
איור 4.8 – גרף קשירות אדום-שחור של תתי-קבוצות עם חיתוך מרובה



לכן, נרחיב את ההגדרה של גרף מצומצם, על מנת לטפל גם במקרה זה:

4.2. הגדרה: גרף קשירות אדום-שחור מצומצם – הגרף המקורי לאחר מחיקת כל הקודקודים ששייכים לתת-קבוצה יחידה, ואיחוד כל הקודקודים הנמצאים באותו חיתוך של תתי-קבוצות.

איור 4.9 – גרף קשירות אדום-שחור לאחר צמצום



נזכיר כי אורך מעגל בגרף קשירות אדום-שחור הוא מספר הקודקודים האדומים במעגל (ראה הגדרה 4.1 סעיף 4).

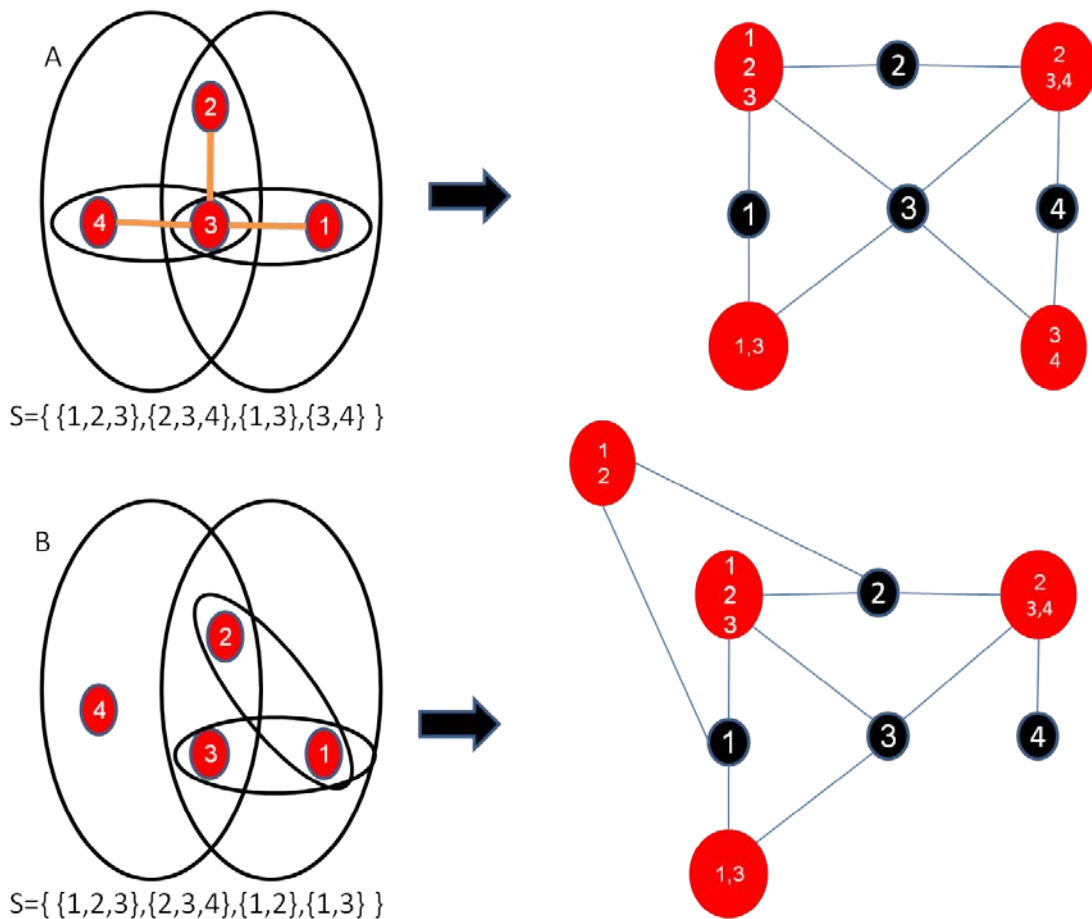
ג. מעגלים בגרף קשירות אדום-שחור

השערת המעגלים הקצרים – בשלב זה, העלינו השערה כי לגרף המקורי קיים עץ פתרון אמ"ם גרף הקשירות הדו-צדדי הוא עץ או שהוא מכיל מעגלים באורך=2. (כלומר, אם יש מעגל באורך $3 \leq$ אז אין עץ פתרון).

קריטריון זה עובד היטב על כל הדוגמאות שהוצגו מתחילת הפרק, אך מאחר שאנו מתקשים למצוא הוכחה להשערה, אנו מבינים כי הקריטריון פשוט מדי ויש איתו בעיה. לצורך העניין, נבחן את הדוגמה באיור הבא.

ההסבר המלא מופיע לאחר האיור.

איור 4.10 – הפרכה להשערת המעגלים הקצרים



שני המקרים באיור דומים מאד, ובכל זאת למקרה A יש עץ פתרון (קשתות העץ הפורש מסומנות בכתום באיור במקרה A) ולמקרה B אין עץ פתרון.

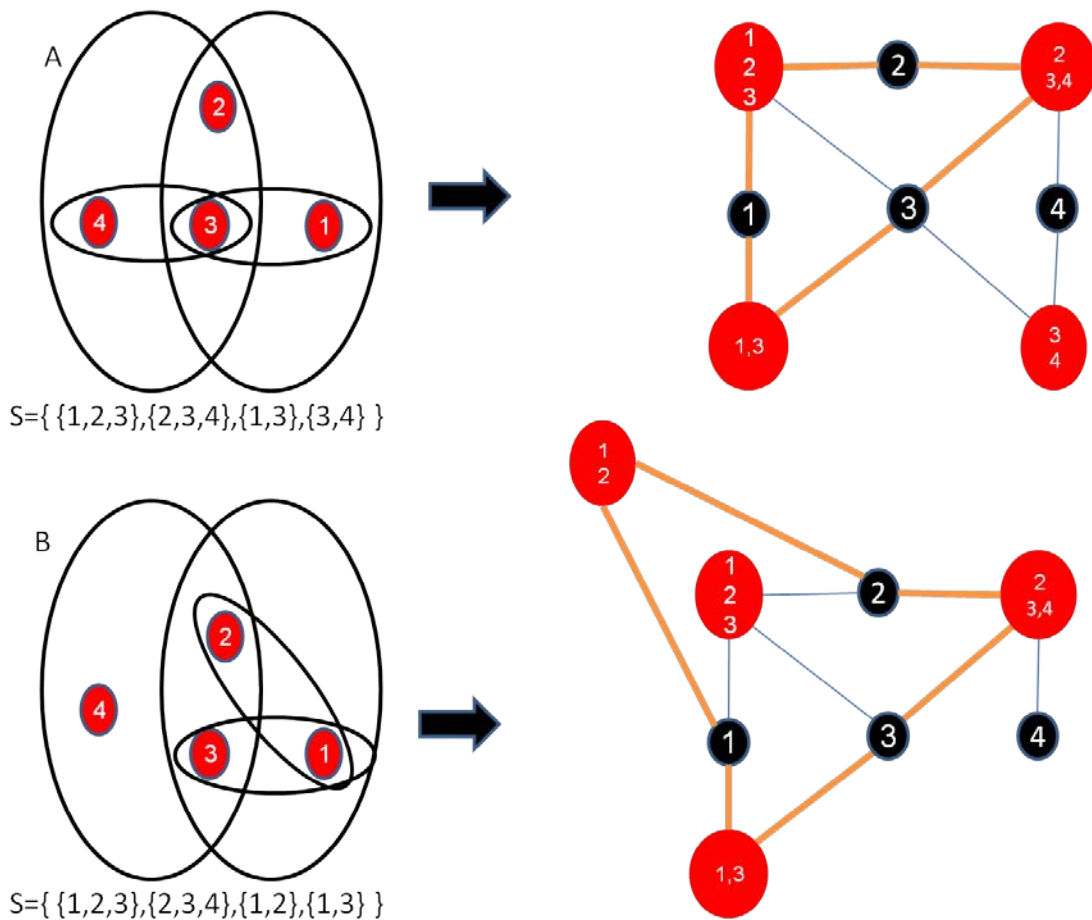
הסבר: הגרף המקורי כולל 4 קודקודים ולכן לעץ הפורש אותו נדרשות 3 קשתות בלבד. עם זאת, בגרף הבעיה ישנן שתי תתי-קבוצות בגודל 3 אשר דורשות לפחות $2 \times 2 = 4$ קשתות כדי לפרוש אותן. הקשת הרביעית תיצור מעגל בגרף הבעיה המקורי.

במבט ראשון גרפי הקשירות של שניהם נראים "בסדר" – כלומר, עומדים בקריטריון שהגדרנו וכוללים רק מעגלים קצרים מאורך 2 (יש מעגלים ארוכים יותר בגרף, אך יש בהם מיתרים ואשר מחלקים אותם למעגלים קצרים באורך 2).

בחינה מעמיקה יותר תגלה שההגדרה של מעגל בגרף קשירות אדום-שחור צריכה להיות זהירה יותר, ונדרש להגדיר היטב כיצד לספור מעגלים, ומה נחשב מיתר בגרף הקשירות.

נתבונן במעגל הנוצר בין הקודקודים 1-2-3 (ראה סימון באיור הבא) בשני הגרפים. האבחנה היא כי בגרף A יש מיתר המחלק את המעגל לשני מעגלים קטנים (אורך 2), בעוד שהמעגל בגרף B חסר מיתרים – ולכן הוא באורך 3 – ואין לו פתרון.

איור 4.11 – מעגלים בגרף קשירות אדום-שחור



4.3. הגדרה: מעגל בגרף קשירות אדום-שחור –

יהי G' גרף קשירות אדום-שחור של גרף G . מעגל ב G' הוא מהצורה:

$$U_1, v_{12}, U_2, v_{23}, U_3 \dots U_{n-1}, v_{n-1n}, U_n, v_{n1}$$

כאשר כל $v_{ij} \in U_i, U_j$.

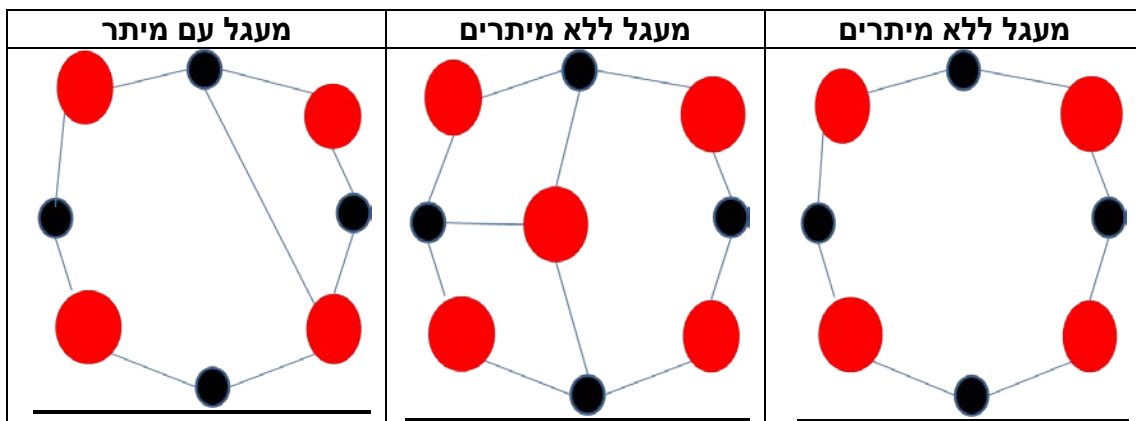
4.4. הגדרה: מיתר בגרף קשירות אדום-שחור -

יהי G' גרף קשירות אדום-שחור של גרף G . ובו מעגל

$$U_1, v_{12}, U_2, v_{23}, U_3 \dots U_{n-1}, v_{n-1n}, U_n, v_{n1}$$

קיים מיתר במעגל אם קיים קודקוד $v_{ij} \in U_k, k \neq i, j$.

ובאופן סכמטי, ניתן לתאר זאת כך:



בשלב הבא ניסינו לתקן את ההשערה המקורית בצורה הבאה:

4.5. השערה: לגרף המקורי אין עץ פתרון אמ"ם יש בגרף הקשירות האדום-שחור מעגל חסר מיתרים באורך ≤ 3 .

[או בניסוח נוסף – לגרף המקורי יש עץ פתרון אמ"ם גרף הקשירות האדום-שחור הוא עץ או שהוא מכיל רק מעגלים באורך ≤ 2 (וממילא חסרי מיתר).]

הוכחה:

כיוון 1: אם יש מעגל חסר מיתרים באורך ≤ 3 אז לגרף המקורי לא קיים עץ פתרון.

נניח בשלילה שקיים עץ פתרון לגרף המקורי, כלומר קיים עץ פורש לגרף כולו, הפורש גם כל אחת מתתי-הקבוצות.

נסמן את המעגל $U_1, v_{12}, U_2, v_{23}, U_3, v_{34} \dots U_n, v_{n1}$, כאשר $U_1, U_2, U_3 \dots U_n$ הם קודקודי הקבוצות (אדומים) המתאימים לתתי-הקבוצות $S_1, S_2, S_3 \dots S_n$ בגרף הבעיה. והקודקודים $v_{12}, v_{23}, v_{34} \dots, v_{n1}$ הם קודקודי החיתוך (שחורים), כך שמתקיים:

$$v_{12} \in U_1 \cap U_2$$

$$v_{23} \in U_2 \cap U_3$$

...

$$v_{n1} \in U_n \cap U_1$$

- העץ פורש את S_1 כתת-עץ, לכן קיים מסלול v_{n1}, v_{12} שעובר דרך קודקוד הקבוצה U_1 .
- העץ פורש את S_2 כתת-עץ, לכן קיים מסלול v_{12}, v_{23} שעובר דרך קודקוד הקבוצה U_2 .
- ...
- העץ פורש את S_n כתת-עץ, לכן קיים מסלול v_{n-1n}, v_{n1} שעובר דרך קודקוד הקבוצה U_n .

קיבלנו אם כך מסלול $v_{12} - v_{23} - \dots - v_{n1}$. מכיוון שהמעגל חסר מיתרים, ואורכו לפחות שלוש, מסלול זה עובר דרך לפחות קודקוד אחד, ללא הגבלת הכלליות, v_{23} , שלא שייך לקבוצה S_1 .

מצד שני, העץ פורש את S_1 כתת-עץ, לכן קיים מסלול אחר בין v_{n1}, v_{12} שעובר דרך קודקוד הקבוצה U_1 .

צירוף שני מסלולים אלו יוצר מעגל בכל פתרון, בסתירה להנחה שהפתרון הוא עץ פורש של הגרף כולו.

□

כיוון 2:

הכיוון השני מורכב ודורש בניה – כלומר יש להראות איך מגרף קשירות אדום-שחור שמקיים את התנאי ניתן למצוא את עץ הפתרון של הגרף המקורי.

גם לאחר נסיונות רבים, לא הצלחנו להוכיח כיוון זה, ולכן עברנו לגישה אחרת בשם "גרף קשירות ממושקל" המוצגת בפרק הבא, ואשר פתרה את הבעיה. למרות שלא הוכחה, גם לא הצלחנו להפריך את ההשערה, ויתכן מאד שההשערה נכונה...

פרק 5 – גרף קשירות ממושקל

א. גרף קשירות ממושקל- הגדרה

בכל הגישות והנסיונות האמפיריים לפתור את הבעיה, נוכחנו לדעת כי כדאי תמיד לבחור עבור עץ הפתרון את הקשתות שהקודקודים שלהן מוכלים בהכי הרבה תתי-קבוצות. גישה חמדנית זו נותנת רמז שאולי הפתרון לבעיה נמצא באלגוריתמים החמדניים לעצים פורשים – כמו האלגוריתמים הקלאסיים של קרוסקל או של פרים לבעיית ה-MST. (ראה [3])

5.1. הגדרה: גרף קשירות ממושקל – יהי HG היפרגרף הבעיה המקורי. נבנה את גרף הקשירות הממושקל G , על קבוצת הקודקודים V באופן הבא:

קיימת קשת בין שני קודקודים $v_j, v_k \in V$ אם"ם קיימת תת-קבוצה S_i כך שמתקיים:

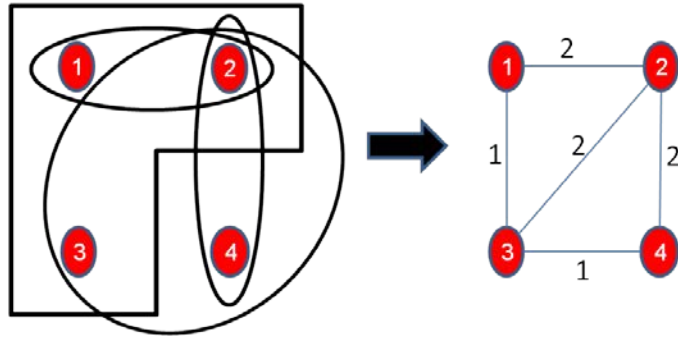
$$v_j \in S_i \wedge v_k \in S_i$$

כל קשת בין שני קודקודים v_j, v_k תקבל בגרף G את המשקל:

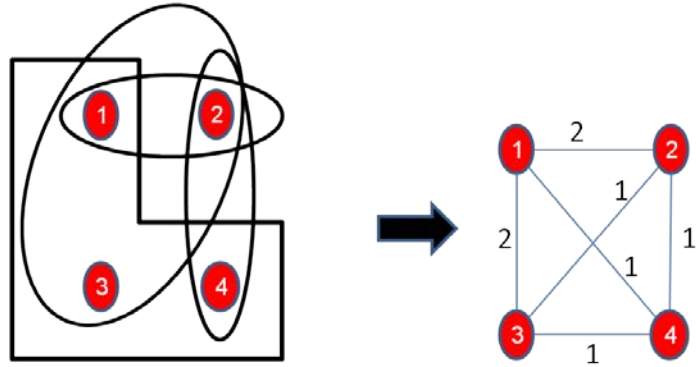
$$|\{S_i \in \mathbf{S} \mid v_j \in S_i \wedge v_k \in S_i\}|$$

כלומר מספר הקבוצות ב \mathbf{S} שמכילות את הקשת.

איור 5.1 – דוגמאות לבניית גרף קשירות ממושקל מהיפרגרף הבעיה המקורי



$$S = \{ \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\} \}$$



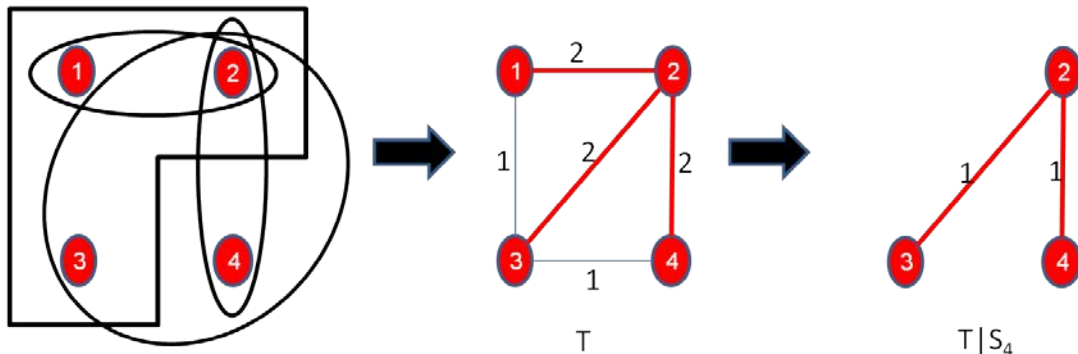
$$S = \{ \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{2,4\} \}$$

ב. תנאי הכרעה בגרף ממושקל

5.2 הגדרה: יהי T עץ פורש בגרף הקשירות הממושקל G . יהי W_T משקל העץ, כלומר סכום משקלי הקשתות בעץ.

5.3 הגדרה: $T|_{S_i}$ - יקרא המושרה של העץ T על תת-הקבוצה S_i . **משקל העץ המושרה** הוא סכום משקלי (כמות) הקשתות של העץ המושרה מתת-הקבוצה S_i בלבד. באיור הבא משקל העץ המושרה על קבוצה S_4 הוא 2.

איור 5.2 – המושרה של העץ T על תת-הקבוצה S_4



$$S = \{ S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{2,4\}, S_3 = \{1,2,3\}, S_4 = \{2,3,4\} \}$$

5.4 טענה: משקלו של כל עץ פורש בגרף הקשירות הממושקל אינו עולה על

$$\sum_{i=1}^n |S_i| - n$$

הוכחה: יהי T עץ פורש בגרף הקשירות הממושקל.

- משקל $T|_{S_1}$ המושרה של העץ T על תת-הקבוצה S_1 הוא קטן או שווה $|S_1| - 1$. (אחרת ייווצרו מעגלים)
- משקל $T|_{S_2}$ המושרה של העץ T על תת-הקבוצה S_2 הוא קטן או שווה $|S_2| - 1$.
- ...
- משקל $T|_{S_n}$ המושרה של העץ T על תת-הקבוצה S_n הוא קטן או שווה $|S_n| - 1$.

מהאמור לעיל, נקבל כי משקל העץ כולו אינו עולה על $\sum_{i=1}^n |S_i| - n$ כנדרש.

□

5.5 משפט: נסמן ב W את משקל העץ הפורש המקסימלי של גרף הקשירות הממושקל.

א. לבעיה המקורית יש עץ פתרון אם ורק אם $W = \sum_{i=1}^n |S_i| - n$.

ב. העץ הפורש המקסימלי עצמו מהווה פתרון לבעיה.

הערה:

נשים לב כי אנו מחפשים עץ פורש מקסימלי ולא מינימלי. קיימים מספר אלגוריתמים מפורסמים למציאת עץ פורש מינימלי (MST) למשל האלגוריתמים של Prim או של Kruskal (ראה פרק 24.2 בספר "מבוא לאלגוריתמים" מאת קורמן ושות') [3]. על מנת להפוך אלגוריתם של MST לאלגוריתם למציאת עץ פורש מקסימלי כל שנדרש לעשות הוא להפוך את משקלי העץ המקורי לשליליים ולהריץ את אלגוריתם ה- MST . ברור כי העץ שיחזיר האלגוריתם יהיה עץ פורש מקסימלי לגרף המקורי.

הוכחה:

כּוּוּן 1: נוכיח כי אם המשקל של העץ הפורש המקסימלי T בגרף הקשירות הממושקל הוא $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$ אז T מהווה פתרון לבעיה.

נתון כי T הוא עץ, ולכן לא מכיל מעגלים, מכאן ברור שעבור כל S_i , ההשראה של העץ $T|_{S_i}$ לא מכיל מעגלים.

נותר להוכיח כי העץ T פורש גם כל אחת מתתי-הקבוצות, כלומר שעבור כל S_i מתקיים ש- $T|_{S_i}$ פורש את S_i . באופן שקול נדרש רק להוכיח שמספר הקשתות ב- $T|_{S_i}$ הוא $|S_i| - 1$.

כעת, ללא הגבלת הכלליות, נניח בשלילה שקיימת קבוצה S_j שחסרות בה קשתות. כלומר $|T|_{S_j}| > |S_j| - 1$. כלומר, השראת העץ על אותה תת-קבוצה קטן ממספר הקודקודים פחות 1.

על פי הנתון, משקל כל העץ הוא $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$. לכן בהכרח יש קבוצה אחרת S_m שבה $|T|_{S_m}| - 1 \geq |S_m|$ וזה לא יכול להיות כי $T|_{S_m}$ לא מכיל מעגלים.

כּוּוּן 2: כעת, נוכיח כי אם יש עץ פתרון לבעיה - אז משקל העץ הפורש המקסימלי הוא $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$

יהי T פתרון לבעיה. נתבונן במשקל עץ זה בגרף הממושקל:

- $T|_{S_1}$ פורש את תת-הקבוצה S_1 ולכן יש בו $|S_1| - 1$ קשתות.
- $T|_{S_2}$ פורש את תת-הקבוצה S_2 ולכן יש בו $|S_2| - 1$ קשתות.
- ...
- $T|_{S_n}$ פורש את תת-הקבוצה S_n ולכן יש בו $|S_n| - 1$ קשתות.

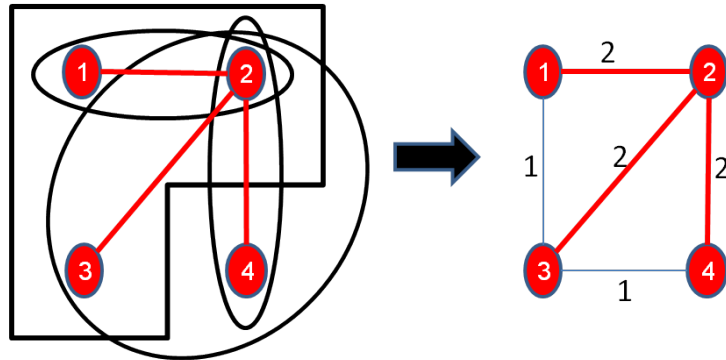
נסכם כעת את המשקל של T ונקבל כי הוא לפחות $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$.

מצד שני, הוכחנו בטענת העזר, כי משקל העץ המקסימלי אינו עולה על $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$. לכן נקבל כי משקל העץ T שווה $n - \sum_{i=1}^n |S_i|$ כנדרש.

□

באיורים הבאים מוצגות שתי דוגמאות להמחשת ההוכחה.

איור 5.3 - דוגמה 1: גרף בעיה עם עץ פתרון



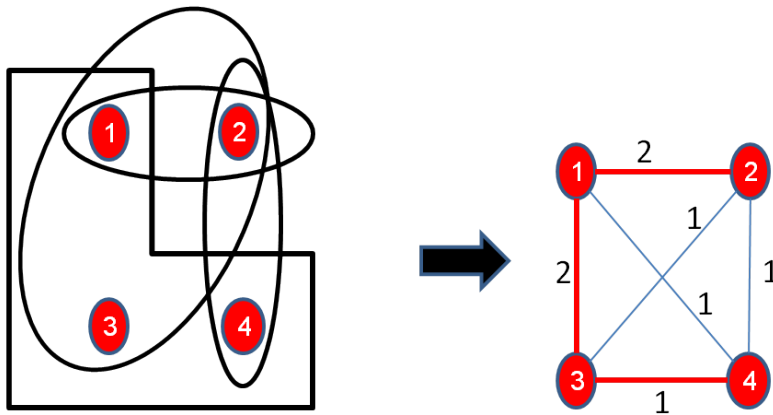
$$\Omega = \{ \{1,2\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\} \}$$

משקל העץ המקסימלי בגרף הממושקל = 6.

סכום משקלי הקודקודים בתתי-הקבוצות (בכל תת-קבוצה, גודל תת-הקבוצה פחות אחד) הוא $2+2+1+1 = 6$

ואכן לבעיה קיים עץ פתרון המסומן באדום.

איור 5.4 - דוגמה 2: גרף בעיה ללא פתרון



$$\Omega = \{ \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2\}, \{2,4\} \}$$

משקל העץ המקסימלי בגרף הממושקל = 5.

סכום משקלי הקודקודים בתתי-הקבוצות (בכל תת-קבוצה, גודל תת-הקבוצה פחות אחד) הוא $2+2+1+1 = 6$.

ואכן לבעיה לא קיים פתרון.

פרק 6 – הוספת קודקודים לגרף הבעיה

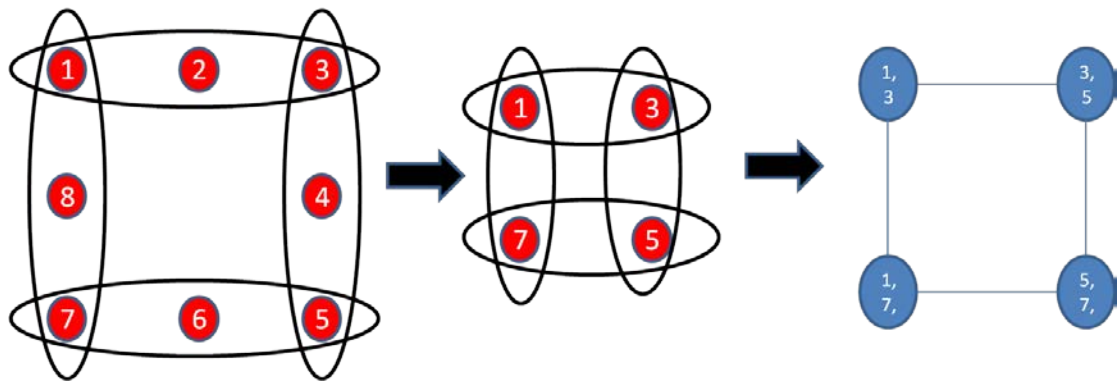
א. הוספת קודקודים – פתרון הכוכב

בפרק זה, נעזוב את גרפי הקשירות ואת בעיית ההכרעה, על מנת לבחון את המקרים בהם אין עץ פתרון לגרף הבעיה המקורי, ונבחן מקרים בהם אנו מרשים להוסיף קודקודים לתתי-הקבוצות על מנת למצוא פתרון לבעיה.

במקרה של הוספת קודקוד זר, ברור כי ניתן היה להוסיף אותו לכל אחת מתתי-הקבוצות ולקבל עץ פתרון, אך אנו לא נעסוק במקרה זה.

לדוגמה, נבחן גרף בעיה באיור הבא ואת גרף הקשירות המתאים לו. לגרף זה אין עץ פתרון.

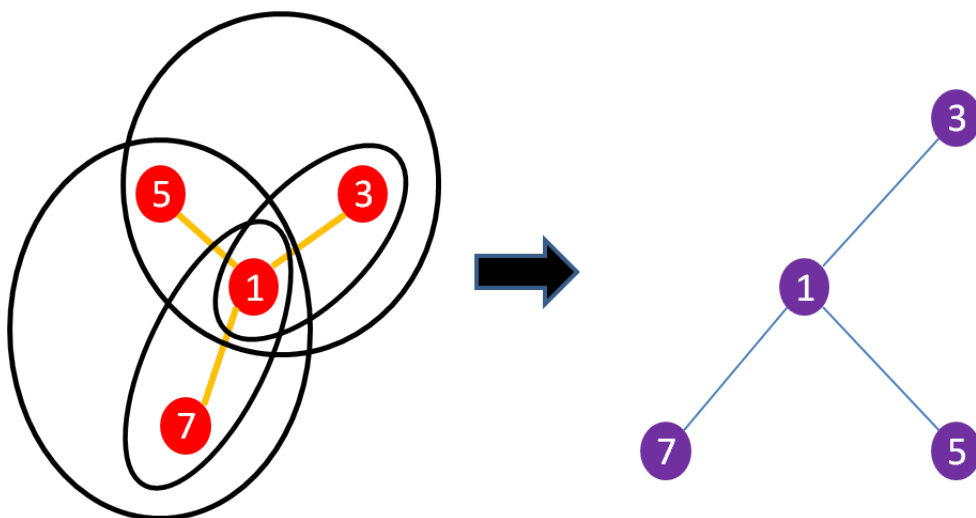
איור 6.1 – גרף בעיה, הגרף המצומצם וגרף הקשירות שלו



$$S = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{7,8,1\} \} \rightarrow \{ \{1,3\}, \{3,5\}, \{5,7\}, \{7,1\} \}$$

הגישה הפשוטה ביותר לפתרון של גרף בעיה ללא עץ פתרון, היא להוסיף את אחד הקודקודים לכל אחת מתתי-הקבוצות, כך ניתן לייצר עץ פתרון בצורת כוכב (הסבר מפורט בעמוד הבא). כמודגם באיור הבא:

איור 6.2 – תתי-הקבוצות וגרף הפתרון לאחר הוספת קודקוד 1



$$S' = \{ \{1,3\}, \{1,3,5\}, \{1,5,7\}, \{1,7\} \}$$

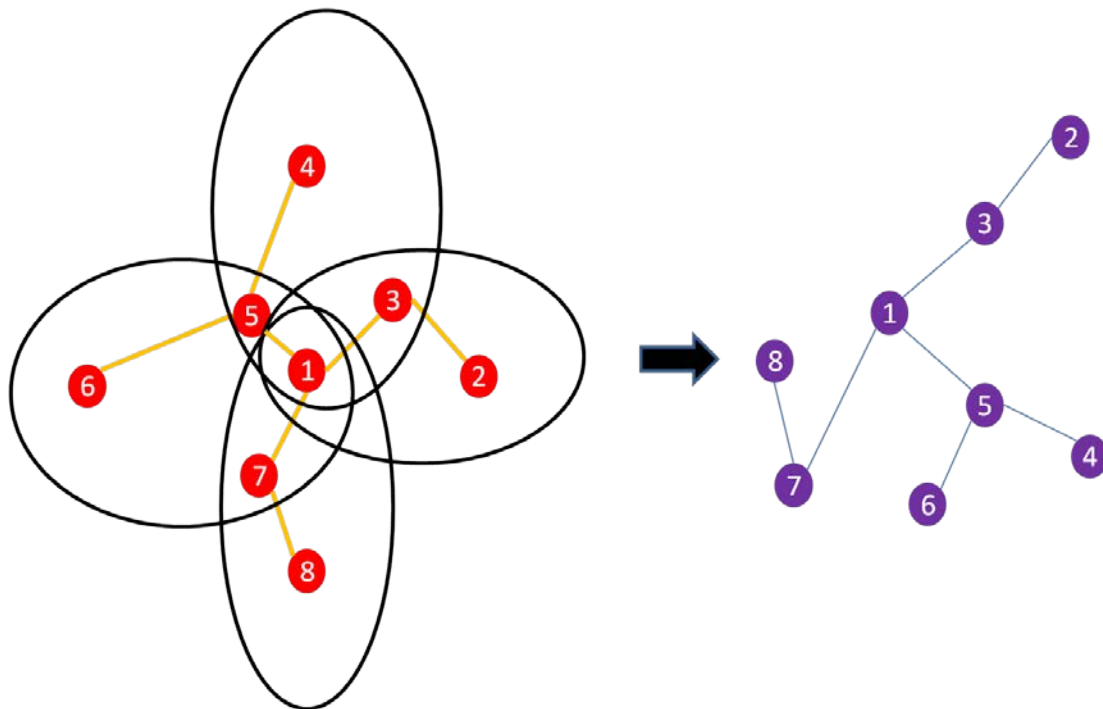
סימון – לאורך העבודה, אוסף תתי-קבוצות לאחר ההוספה יסומן ב-S', והקודקודים שנוספו יופיעו בתחתית האיור בצבע אדום מודגשים עם קו תחתי.

בפתרון זה, הוספנו את קודקוד מספר 1 לשתי תתי-קבוצות. ניתן לשים לב כי הקודקודים שאינם משמעותיים (שאינם קודקודי החיתוך) נוספו לעץ הכוכב שהתקבל כעלים.

לצורך ההדגמה, נראה כאן את פתרון הכוכב, בגרף המקורי, ולא רק בגרף המצומצם.

פתרון כוכב – משמעותו שקיים קודקוד ספציפי אשר נמצא בכל אחת מתתי-הקבוצות ומשמש כמרכז הכוכב - נקודה מרכזית המחברת את כל תתי-העצים לעץ הפורש את הגרף כולו. באיור הבא קודקוד זה הוא קודקוד מספר 1.

איור 6.3 – גרף הבעיה המקורי (ללא צמצום) לאחר הוספת הקודקוד



$$S = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{7,8,1\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,3\}, \underline{\{1,3,4,5\}}, \underline{\{1,5,6,7\}}, \{1,7,8\} \}$$

ב. בחינת פונקציות המטרה

כזכור, בתחילת העבודה, הגדרנו מספר פונקציות מטרה שונות לבחינת היעילות של הפתרונות המתקבלים באמצעות הוספת קודקודים.

נשתמש בדוגמה לעיל כמקרה מבחן, ונתבונן בפונקציות המטרה השונות עבור פתרון זה:

$$F_1(G, S) = 2$$

$$F_2(G, S) = 2$$

$$F_3(G, S) = 2$$

הסבר –

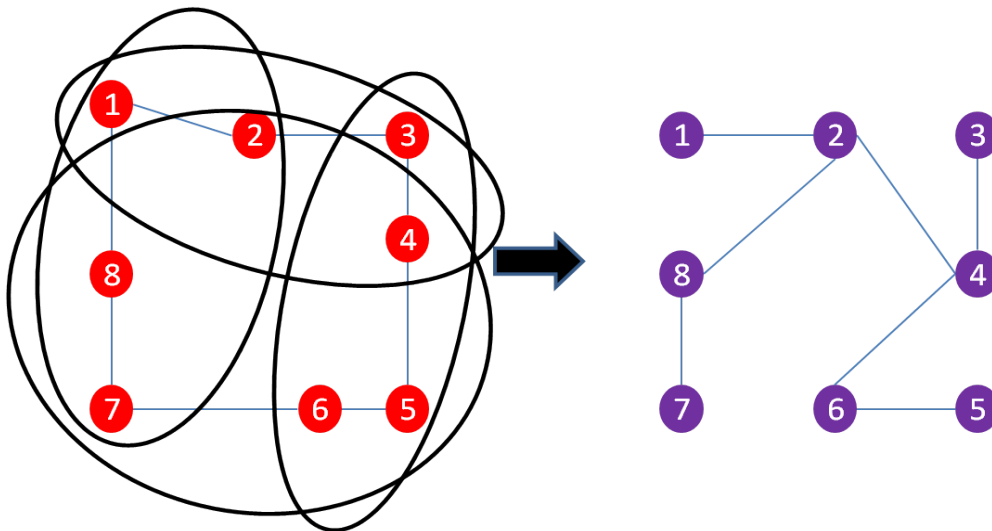
$F_1(G, S) = 2$ כי הוספנו פעמיים את קודקוד מספר 1 לשתי תתי-קבוצות, ופונקציה זו סופרת את מספר הקודקודים שהוספו, ללא קשר אם הם זהים.

$F_2(G, S) = 2$ כי פונקציה זו סופרת את מספר ההוספות הגבוה ביותר מקודקוד מסויים (ומנסה למזער אותן) כאשר הרעיון הוא לוודא שאין צומת יחיד ה"שולט" על הפתרון. ואכן קודקוד מספר 1, נוסף פעמיים.

$F_3(G, S) = 2$ כי פונקציה זו סופרת את מספר תתי-הקבוצות בהן התבצע שינוי, ללא קשר לכמות הקודקודים שנוספה להן. כאן נוספו קודקודים לשתי תתי-קבוצות.

קיימים גם פתרונות קצת פחות טריוויאליים מפתרון הכוב. כמו הפתרון הבא למשל:

איור 6.4 – גרף הבעיה לאחר תהליך הוספת הקודקודים



$$S = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{7,8,1\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,3,4\}, \{3,4,5,6\}, \{5,6,7,8,2,4\}, \{7,8,1,2\} \}$$

פונקציות המטרה השונות עבור פתרון זה הן:

$$F_1(G, S) = 6$$

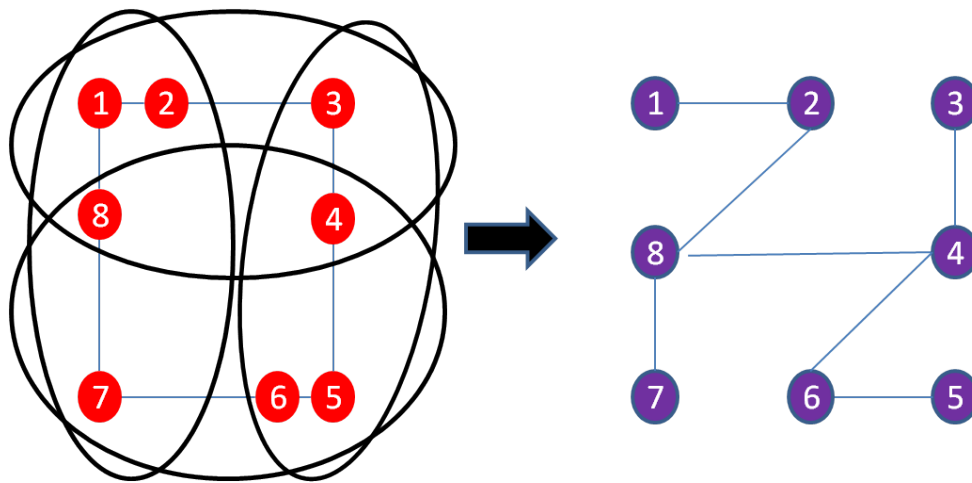
$$F_2(G, S) = 2$$

$$F_3(G, S) = 4$$

ניתן לראות כי פתרון זה נחות יותר מפתרון הכוכב לפונקציות $F_3 - F_1$.

פתרון "מאוזן" יותר מבחינת כמות ההוספות לכל תת-קבוצה יכול להראות כך:

איור 6.5 – גרף הבעיה לאחר תהליך הוספת קודקודים שונה



$$S = \{ \{1,2,3\}, \{3,4,5\}, \{5,6,7\}, \{7,8,1\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,3,8,4\}, \{3,4,5,6\}, \{5,6,7,8,4\}, \{7,8,1,2\} \}$$

עם זאת, ערכי פונקציות המטרה עבור פתרון זה יישארו זהות:

$$F_1(G, S) = 6$$

$$F_2(G, S) = 2$$

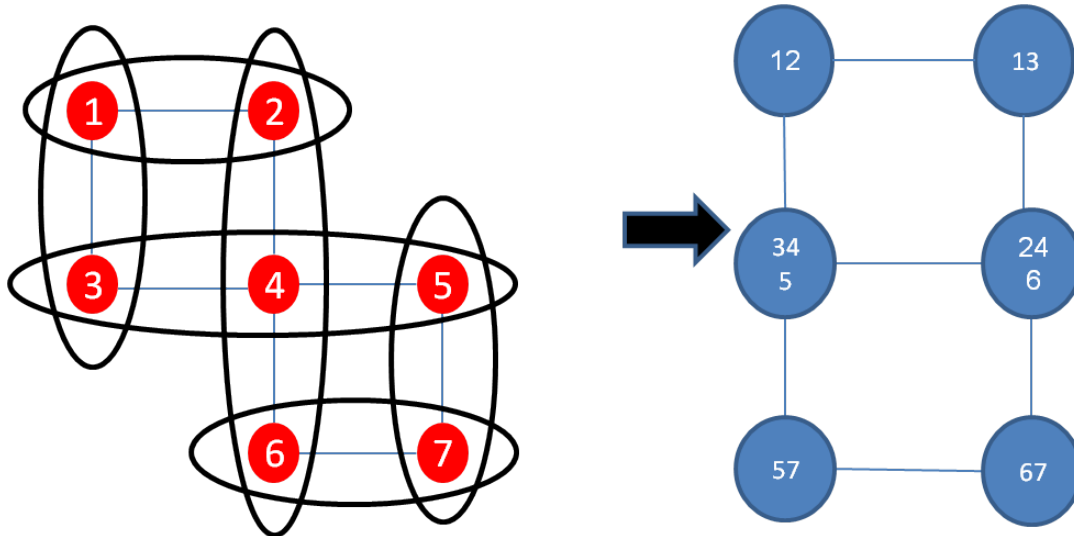
$$F_4(G, S) = 4$$

פתרונות אלו פחות טובים מפתרון הכוכב. בדוגמה האחרונה, למשל, אנו מוסיפים 6 קודקודים בסך-הכל לאוסף תתי-הקבוצות, לעומת שני קודקודים שנוספו בפתרון הכוכב. עם זאת, מיד נראה כי בגרפים מורכבים יותר התוצאה יכולה להשתנות.

ג. גרפי קשירות של מעגל עם מיתרים

קודם לכן, התבוננו בגרף קשירות מסוג מעגל המייצג גרף בעיה מאד פשוט. נקח כעת גרף קשירות מעניין יותר, עדיין נעסוק בקבוצות שהחיתוך ביניהן הוא של קודקוד יחיד, אך נרשה מיתר אחד אשר חוצה את המעגל. נראה כי עבור מקרה זה ניתן למצוא פתרונות שאינם פתרון הכוכב הטרייאלי, עם ערכי פונקציות מטרה נמוכים יותר.

איור 6.6 - גרף בעיה מצומצם וגרף הקשירות התואם



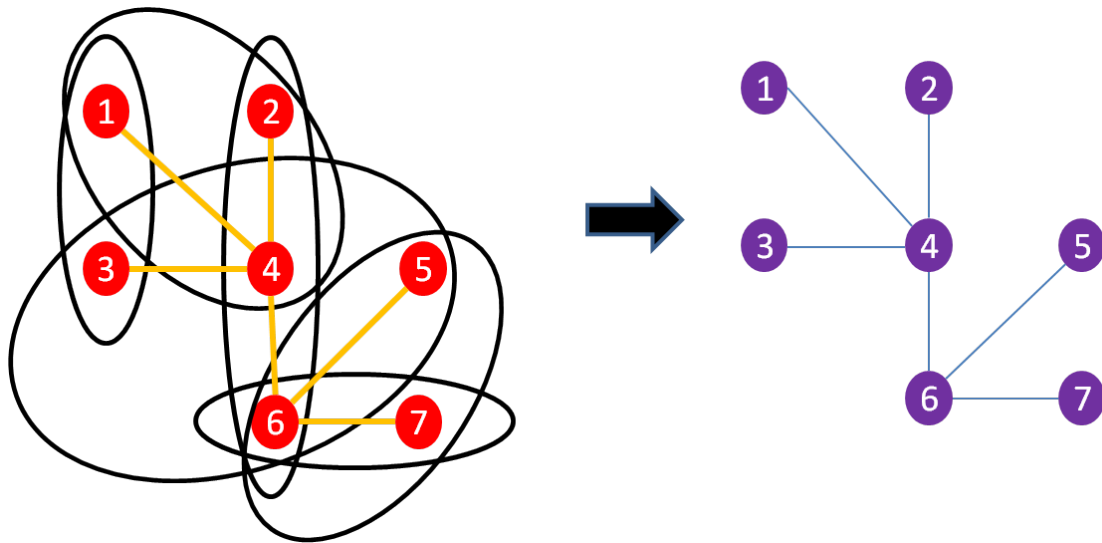
$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

גם לגרף זה אין עץ פתרון:

בגרף המקורי יש 7 קודקודים, ולכן לעץ שפורש אותו נדרשות 6 קשתות. מצד שני, כדי לפרוש כל אחת מתתי הקבוצות בגרף, יש צורך ב- $8 = 2 \cdot (3-1) + 4 \cdot (2-1)$ קשתות בעץ הפתרון. הקשת העודפת היא זו שיוצרת מעגל.

כעת, נבחן את הפתרון הבא המתקבל בעזרת הוספת קודקודים לתתי-הקבוצות:

איור 6.7 – גרף הבעיה לאחר תהליך הוספת קודקודים #4, #6



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5,6\}, \{5,7,6\}, \{6,7\} \}$$

ערכי פונקציות המטרה השונות עבור פתרון זה הן:

$$F_1(G, S) = 4$$

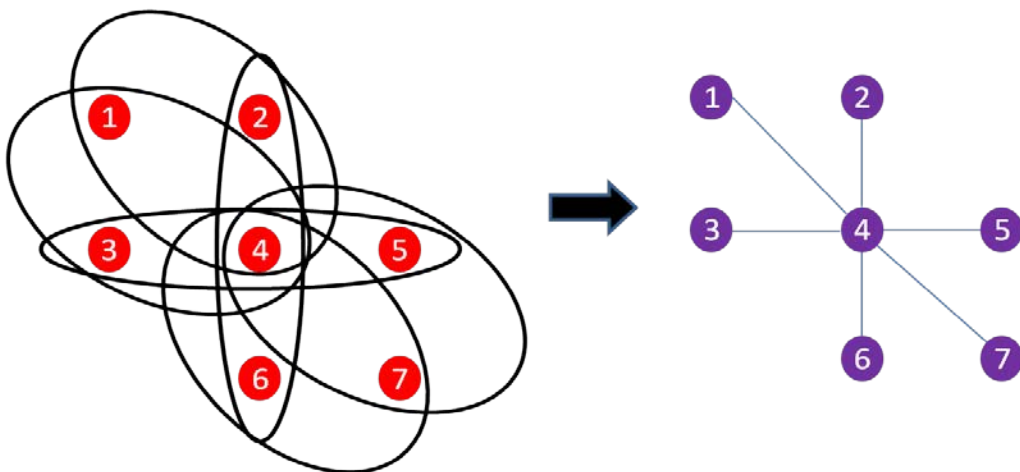
$$F_2(G, S) = 2$$

$$F_3(G, S) = 4$$

במקרה זה נוספו ארבעה קודקודים לתתי-הקבוצות, פעמיים קודקוד מספר 6, ופעמיים קודקוד מספר 4.

האם פתרון זה טוב יותר מפתרון הכוכב הסטנדרטי, בו מוסיפים קודקוד אחד לכל תתי-הקבוצות, כמודגם באיור הבא?

איור 6.8 – פתרון כוכב "קלאסי" בעזרת קודקוד #4



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7,4\}, \{6,7,4\} \}$$

אלו הן ערכי פונקציות המטרה השונות עבור פתרון כוכב זה:

$$F_1(G, S) = 4$$

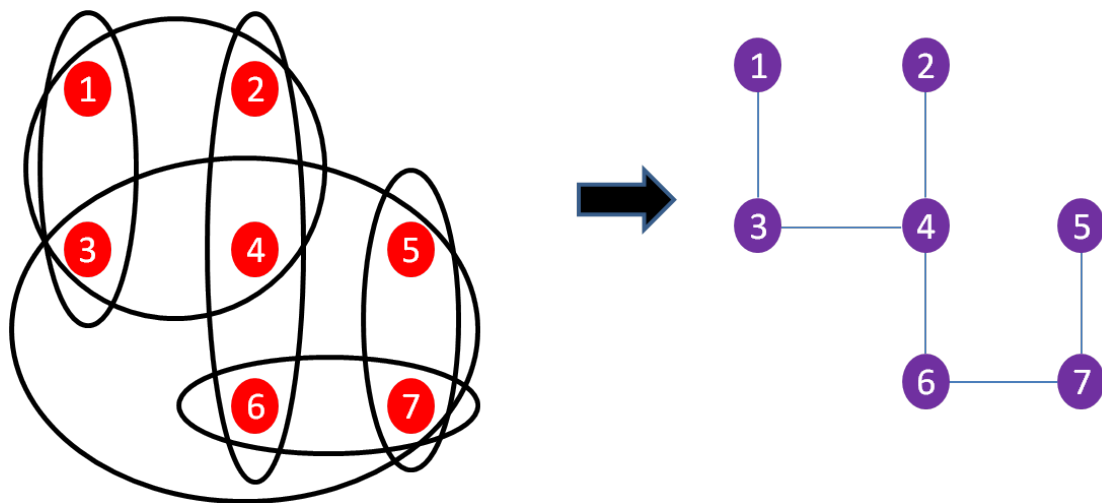
$$F_2(G, S) = 4$$

$$F_3(G, S) = 4$$

ניתן לראות כי מבחינת פונקציות המטרה הראשונה של מספר הקודקודים שאנו מוסיפים – יש שוויון. פתרון הכוכב מוסיף את קודקוד מספר 4 לארבע תתי-קבוצות. אך מבחינת פונקציות המטרה השנייה, אשר מנסה למזער הוספה של קודקוד ספציפי יחיד למספר רב של תתי-קבוצות, הפתרון הקודם טוב יותר. אם נחשוב על דוגמה של רשתות תקשורת, הפונקציה השנייה מנסה להמנע ממצב של צומת ראשי (מרכז הכוכב) אשר יצור "עומס" על שרת יחיד מבחינת כמות תעבורה.

כעת נשאל האם הפתרון שהוצג באיור 6.7, בו פונקציות המטרה $F_2=2$, הוא אכן מיטבי? כלומר, האם פתרון זה הוא פתרון מינימלי לפונקציות המטרה? נראה כי קיים פתרון טוב יותר – כמודגם באיור הבא:

איור 6.9 – הוספת קודקודים 7#,6#,4#,3#



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,3,4\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5,6,7\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

ערכי פונקציות המטרה השונות עבור עץ פתרון זה הן:

$$F_1(G, S) = 4$$

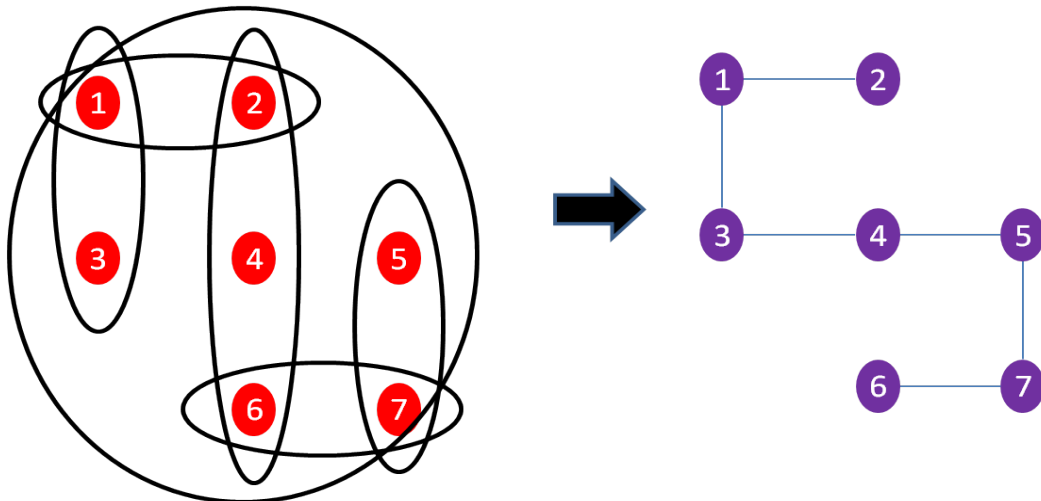
$$F_2(G, S) = 1$$

$$F_3(G, S) = 2$$

אכן, ניתן לראות כי פתרון זה משפר את F_2 . נשים לב כי פתרון זה משפר גם את פונקציית מטרה F_3 . ברור כי פתרון עם ערך 1 הוא אופטימלי עבור F_2 . נשאלת השאלה האם פתרון זה הוא אופטימלי גם עבור F_3 ?

התשובה שלילית. נראה את הפתרון האופטימלי עבורו $F_3=1$ כמודגם באיור הבא:

איור 6.10 – הוספה לקבוצה יחידה



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

ערכי פונקציות המטרה השונות עבור פתרון זה הן:

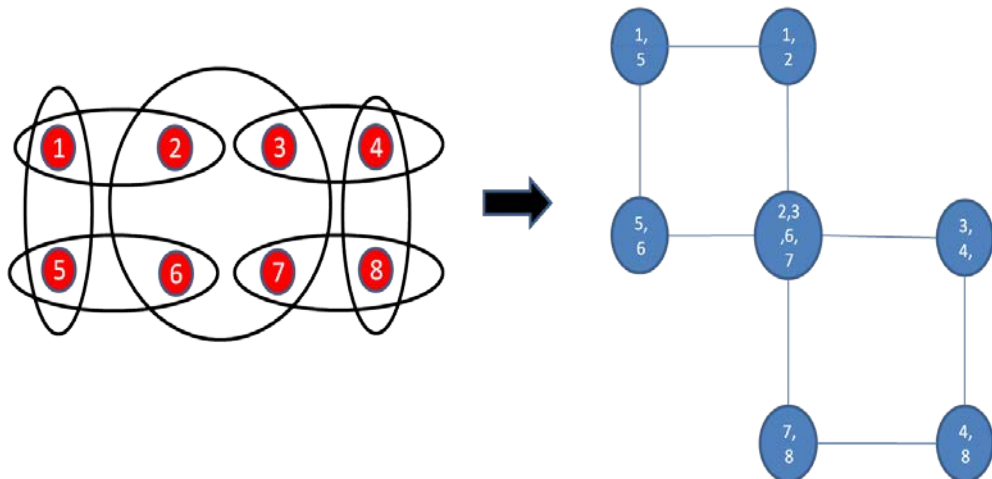
$$F_1(G, S) = 4$$

$$F_2(G, S) = 1$$

$$F_3(G, S) = 1$$

נבחן בקצרה שתי דוגמאות נוספות של גרפי בעיה, שגרף הקשירות שלהם הוא בתצורת שני מעגלים. נבחן מקרים אלו עבור פונקציית המטרה F_1 , אשר מתחשבת ("סופרת") בכל הכנסה של קודקוד לתת-קבוצה (כלומר, גם אם אותו קודקוד מסוים הוכנס פעמיים לשתי תתי-קבוצות שונות – הוא יספר פעמיים), על מנת לנסות ולמצוא השערה או תבנית כללית למספר ההוספות האופטימלי עבור פונקציה זו.

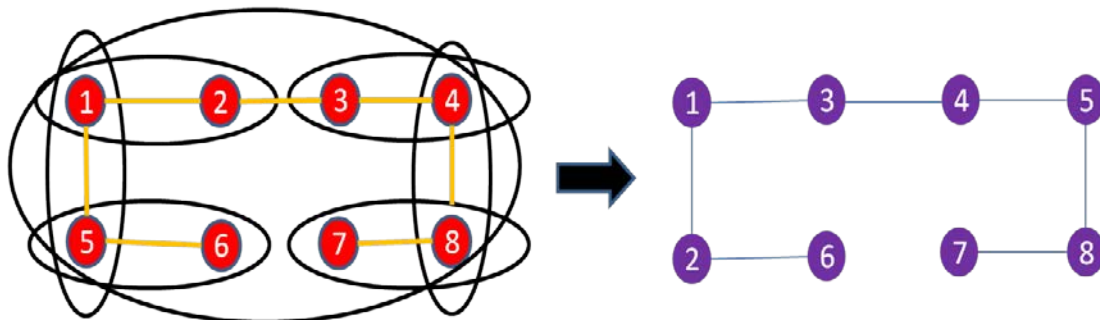
איור 6.11 – גרף קשירות של שני מעגלים בחיבור של קודקוד יחיד



בדוגמה זו הגרף מעט יותר מורכב. זהו גרף מצומצם, עדיין מדובר בחיתוך יחיד בין תתי-הקבוצות, אך ישנה קבוצת חיתוך אחת הנמצאת בחיתוך של ארבע תתי-קבוצות.

באיור ניתן לראות שגרף הקשירות מורכב משני מעגלים. עבור דוגמה זו, הפתרון הטוב ביותר שמצאנו עבור פונקציית המטרה F_1 הוא $4F_1(G, S) =$ כמודגם באיור הבא:

איור 6.12 – גרף הפתרון לאחר הכנסת $1\#, 4\#, 5\#, 8\#$



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{5,6\}, \{2,3,6,7\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{7,8\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{5,6\}, \{2,3,6,7, \mathbf{4,8,1,5}\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{7,8\} \}$$

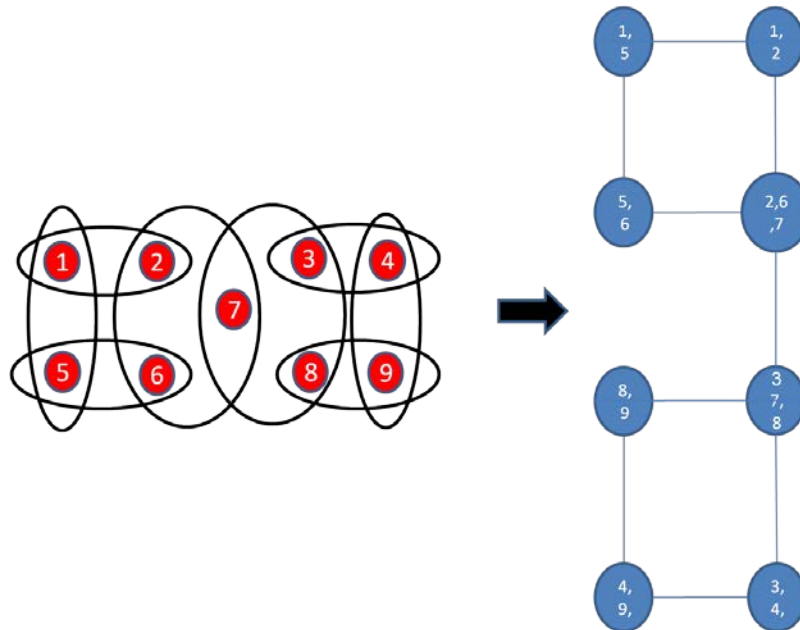
כאמור, ערך פונקציית המטרה F_1 עבור פתרון זה הוא:

$$F_1(G, S) = 4$$

נתבונן עתה בדוגמה נוספת, גם היא של גרף בעיה אשר יוצר גרף קשירות עם שני מעגלים. הפעם, בתצורה שונה מעט – קיימת קשת המחברת בין המעגלים. גם כאן הפתרון הטוב ביותר עבור פונקציית המטרה F_1 הוא $4F_1(G, S) =$ כמודגם באיור הבא.

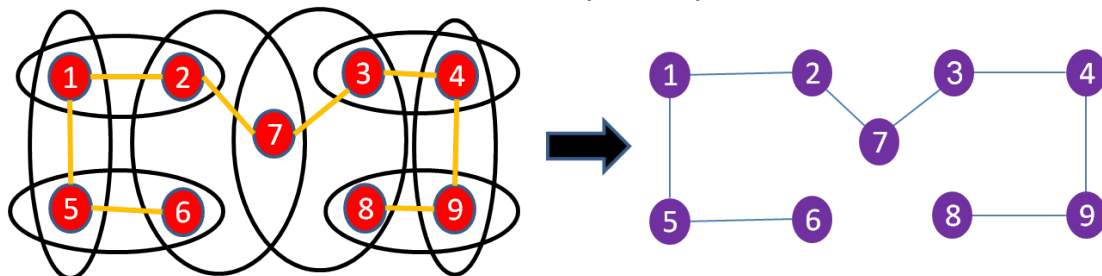
בדוגמה זו גרף הבעיה המצומצם דומה לגרף הקודם (ראה איור 6.11) אך הפעם תת-
 הקבוצה המרכזית הופרדה לשתי תתי-קבוצות הנחתכות בקודקוד יחיד.

איור 6.13 – גרף הבעיה עם גרף הקשירות המתאים לו



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{2,6,7\}, \{3,7,8\}, \{4,9\}, \{8,9\} \}$$

איור 6.14 – גרף הפתרון לאחר הכנסת $9\#, 4\#, 5\#, 1\#$



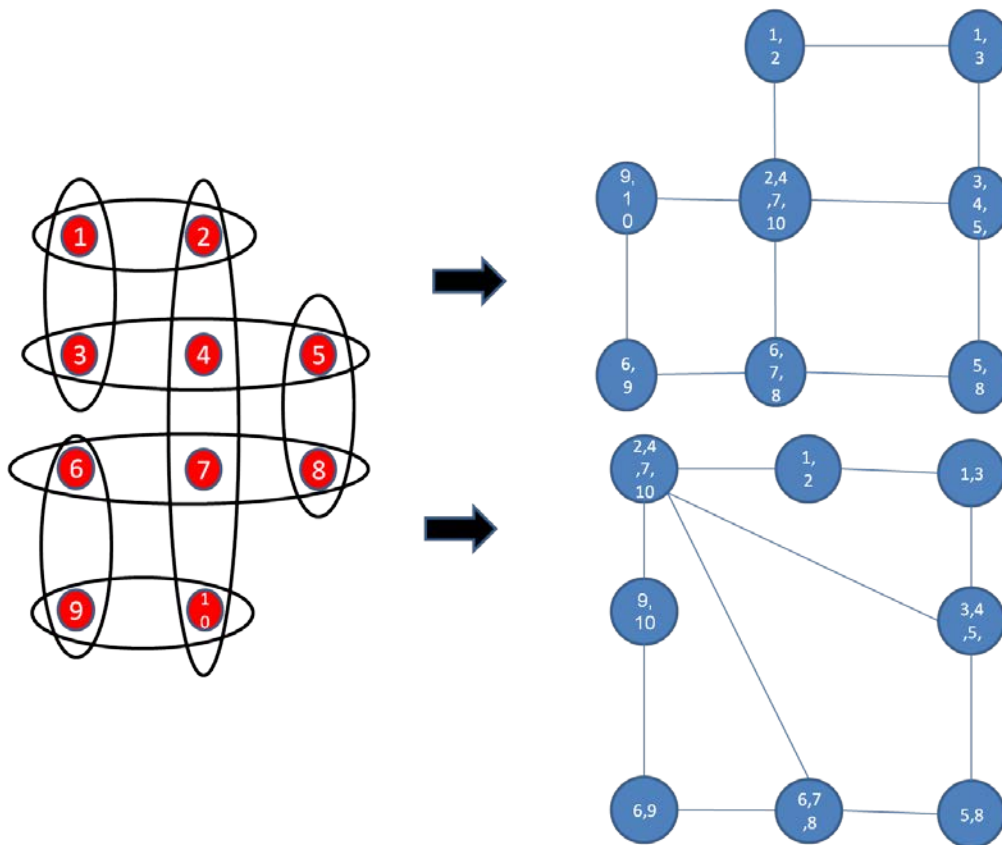
$$S' = \{ \{1,2\}, \{1,5\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{2,6,7, \underline{1,5}\}, \{3,7,8, \underline{4,9}\}, \{4,9\}, \{8,9\} \}$$

כאמור, ערך פונקציית המטרה F_1 עבור פתרון זה הוא:

$$F_1(G, S) = 4$$

נראה כעת, דוגמה נוספת ואחרונה לגרף בעיה, אשר גרף הקשירות שלו הוא מעגל עם שני מיתרים. ננסה להגיע לתובנה כללית לגבי הפתרון האופטימאלי עבור פונקציה F_1 למעגלים עם מספר מיתרים כלשהו שאינם קליקה.

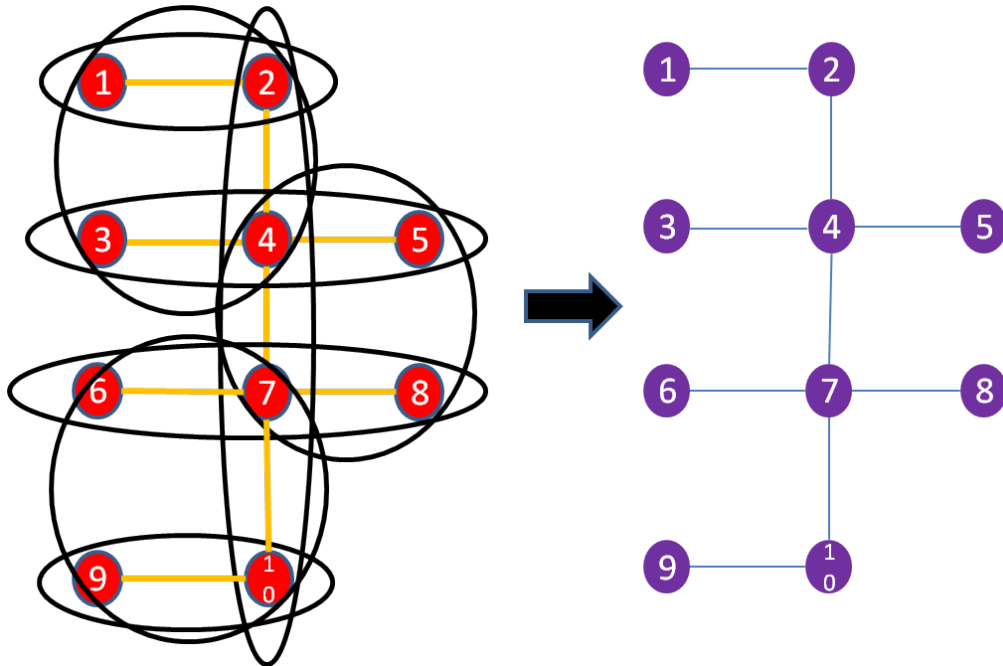
איור 6.15 – מעגל בגרף קשירות עם שני מיתרים



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,7,10\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}, \{6,9\}, \{5,8\}, \{9,10\} \}$$

בגרף ניתן לראות את הגרף המקורי (המצומצם) ואת גרף הקשירות שלו בשתי הצגות שכל ההבדל ביניהן הוא מיקום הקודקודים, על מנת להדגיש את המבנה המעגלי שלהם. הפתרון הטוב ביותר שמצאנו עבור פונקציית המטרה F_1 הוא $6F_1(G, S) =$ כמודגם באיור הבא:

איור 6.16 – הגרף ועץ הפתרון לאחר הכנסת #3, #4, #7, #10,



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,7,10\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}, \{6,9\}, \{5,8\}, \{9,10\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2\}, \{1,3,2,4\}, \{2,4,7,10\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}, \{6,9,7,10\}, \{5,8,4,7\}, \{9,10\} \}$$

מכל הדוגמאות לעיל מצטיירת תבנית מעניינת הקשורה למספר המעגלים שגרף הבעיה יוצר בגרף הקשירות. ננסח זאת כהשערה, וננסה להוכיחה בהמשך העבודה.

ערך פונקצית המטרה F_1 עבור פתרון זה הוא:

$$F_1(G, S) = 4$$

השערה:

יהי n מספר תתי-הקבוצות בגרף, ויהי l אורך מעגל.

א. עבור כל גרף שהוא מעגל באורך $l > 2$, הערך האופטימאלי של F_1 הוא:

$$l - 2F_1(G, S) =$$

ב. עבור גרף המכיל מספר מעגלים שאורך כל אחד מהם $l_i > 3$, הערך האופטימאלי של

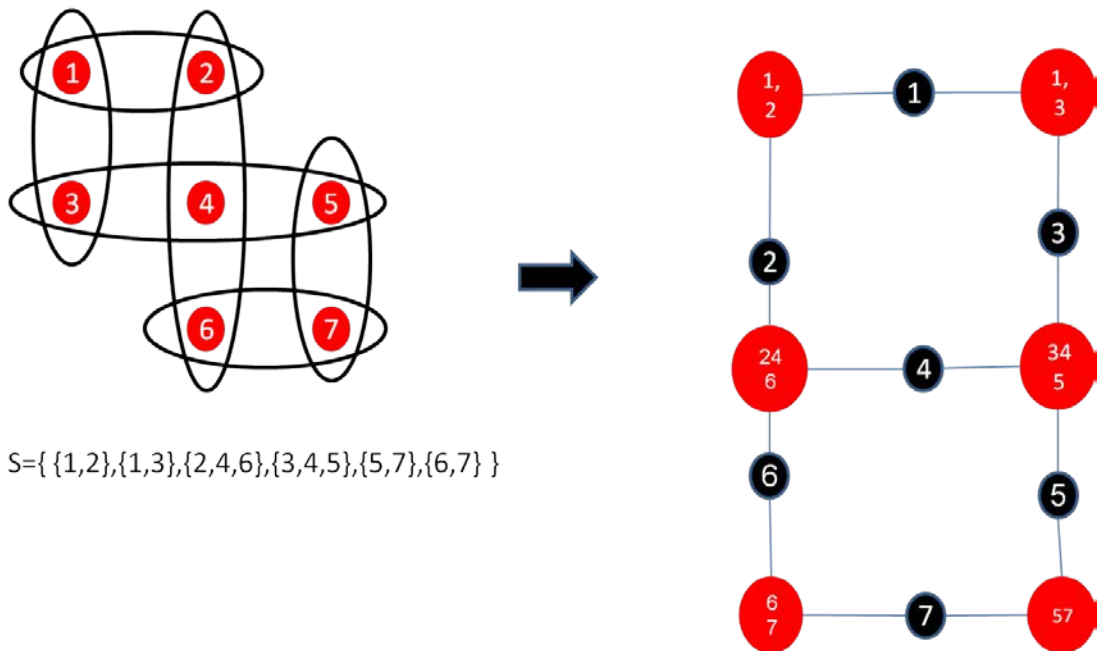
$$F_1$$
 הוא $F_1(G, S) = \sum_i^n (l_i - 2)$

ד. הוספת קודקודים בגרף קשירות אדום-שחור

ננסה כעת לבחון את המשמעות של הוספת הקודקודים לגרף הבעיה דרך גרף הקשירות האדום-שחור שהוצג בפרק 4. המשמעות של הוספת קודקוד v לתת-קבוצה S_i בגרף הבעיה המקורי היא חיבור קשת בין קודקוד קבוצה (אדום) U_i כלשהו לקודקוד החיתוך התואם (שחור) v , בגרף הקשירות האדום-שחור.

נתבונן בדוגמה המופיעה באיור הבא:

איור 6.17 – גרף הבעיה וגרף הקשירות האדום-שחור שלו



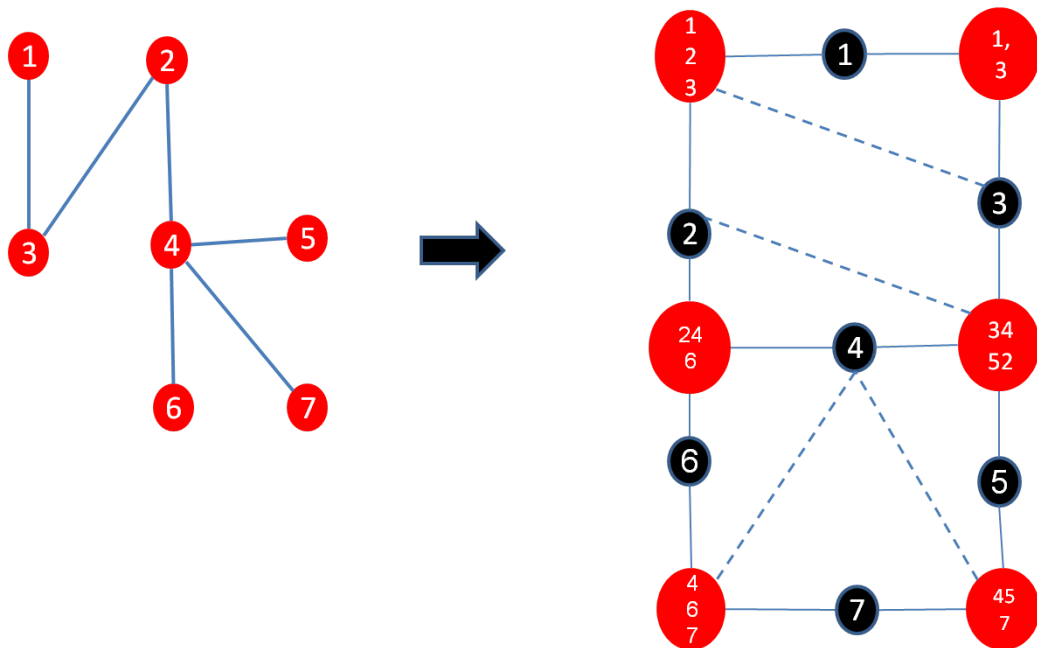
לגרף זה אין עץ פתרון, כמו שהוכחנו בפרק 6-ג'. עובדה זו תואמת את ההשערה מכיוון שיש בגרף הקשירות האדום-שחור שלו שני מעגלים באורך 4.

על מנת לפתור את גרף הבעיה המקורי, נוסיף את הקודקודים הבאים לתתי-הקבוצות באופן הבא:

$$S' = \{ \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\} \}$$

כעת ניתן להבין את המשמעות הגרפית של ההוספה של הקודקודים – זהו "קיצור" של המעגלים לאורך 2, על ידי הוספת מיתרים למעגלים ארוכים, כמודגם באיור הבא.

איור 6.18 – עץ פתרון לגרף הבעיה לאחר הוספת הקודקודים



$$S = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{5,7\}, \{6,7\} \}$$

$$S' = \{ \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,4,6\}, \{2,3,4,5\}, \{4,5,7\}, \{4,6,7\} \}$$

בהנחה שההשערה 4.5 אכן נכונה, ניתן להוכיח בקלות את ההשערה מסוף פרק 4:

השערה

יהי n מספר תתי-הקבוצות בגרף המקורי, ויהי l אורך מעגל (קודקודים אדומים) בגרף קשירות אדום-שחור. תחת ההנחה שהשערה 4.5 אכן נכונה, מתקיים:

א. עבור גרף שהוא מעגל באורך $l > 2$, הערך האופטימאלי של F_1 הוא $l - 2F_1(G, S)$.

ב. עבור גרף המכיל מספר מעגלים שאורך כל אחד מהם $l_i > 2$, הערך האופטימאלי של

$$F_1(G, S) = \sum_i^n (l_i - 2)$$

הוכחה

כאמור, אנו מניחים שהשערה 4.5 נכונה, כלומר שלגרף המקורי אין עץ פתרון אמ"ם יש בגרף הקשירות האדום-שחור מעגל חסר מיתרים באורך ≤ 3 .

בניסוח נוסף – לגרף המקורי יש עץ פתרון אמ"ם גרף הקשירות האדום-שחור הוא עץ או שהוא מכיל רק מעגלים באורך $= 2$ (וממילא חסרי מיתר).

א. כל מעגל בגרף הקשירות האדום-שחור הוא דו-צדדי ולכן באורך זוגי. נסמן קודקוד אדום ב R , וקודקוד שחור ב- B .

כל מעגל מורכב מקודקודים אדומים ושחורים לסירוגין, כלומר בצורה של ...RBRBR... כאמור, המשמעות של הוספת קודקוד לתת-קבוצה בגרף הבעיה המקורי היא "קיצור" המעגל, כלומר הוספת קשת בין קודקוד אדום לשחור.

על פי השערה 4.5, קיים פתרון רק אם כל המעגלים הם באורך 2. כדי "לקצר" מעגל ארוך למעגלים קצרים באורך 2, ניתן להוסיף קשתות מאחד מקודקודי הקבוצה האדומים U_i לכל הקודקודים השחורים במעגל, למעט שני הקודקודים הצמודים אליו. וכך אנו מגיעים לפתרון אופטימלי של הפונקציה $I-2F_1(G, S)$.

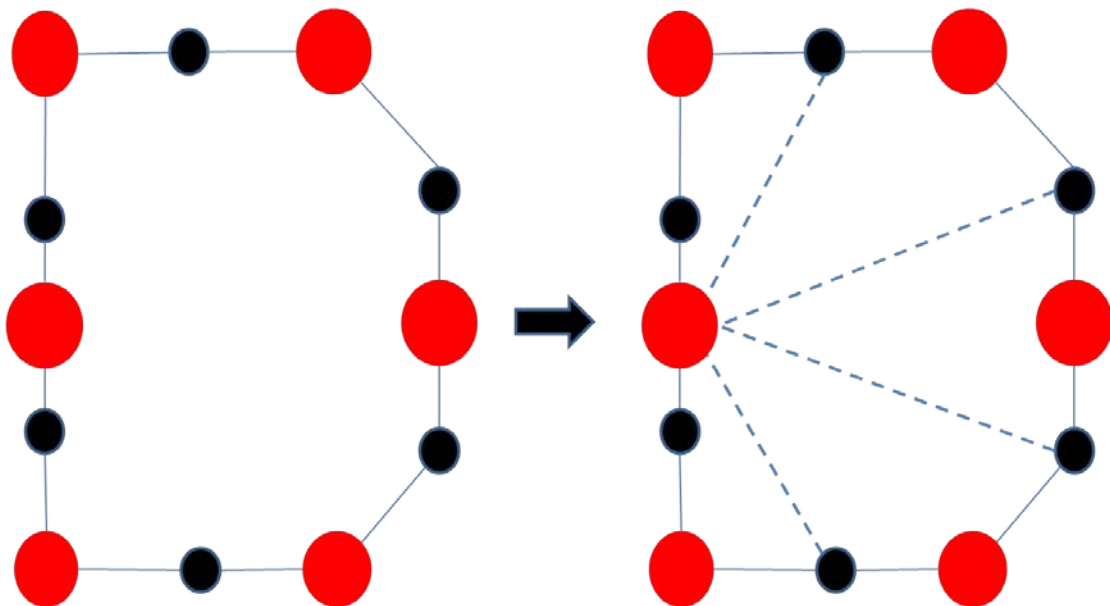
ניתן להוסיף קשתות גם מקודקודי קבוצה אדומים שונים, על מנת לקצר מעגל ארוך למעגלים קצרים באורך 2. כמות הקשתות שנוסיף תהיה זהה בכל הוספה מסוג זה. לכן בחרנו להוסיף קשתות רק מאחד מקודקודי הקבוצה האדומים.

ב. זוהי בעצם הכללה פשוטה של א': נניח שיש k מעגלים באורך גדול מ 2. נסמן את אורכם ב l_1, l_2, \dots, l_k . צריך להוסיף $l_i - 1$ קדקדים כדי "לפתור" את המעגל הראשון, $l_2 - 1$ בשביל השני, וכן הלאה. לכן סך הקדקדים שיש להוסיף כדי שלגרף יהיה פתרון הוא $\sum_i^n (l_i - 2)$.

□

באיור הבא ניתן לראות מעגל באורך 6. על מנת לקצר אותו למעגלים באורך 2, נדרש להוסיף 4 קשתות – כלומר הוספת ארבעה קודקודים בגרף הבעיה המקורי. באיור בחרנו להוסיף לקודקוד קבוצה אדום אחד את כל הקשתות הנחוצות.

איור 6.19 – קיצור מעגלים בגרף קשירות אדום-שחור



פרק 7 – סיכום והמשך המחקר

בעבודה זו עסקנו במציאת תנאים על מנת להכריע האם לבעיה הנתונה קיים פתרון אמפירי או לא. לצורך כך, הגדרנו מספר גרפי קשירות שעזרו לנו בקביעת התנאים לפתרון אפשרי.

השתמשנו בגרפי הקשירות ובתנאים שמצאנו על מנת לבחון מופעים שלהם אין פתרון אפשרי. המטרה היתה למצוא את הוספת הקודקודים האופטימלית, על פי מספר פונקציות מטרה שונות שהגדרנו.

מחקר זה מהווה צעד התחלתי אך משמעותי בבחינת בעיות שאין להן פתרון אפשרי, במטרה להשיג פתרון על ידי הוספת קודקודים לגרף הבעיה המקורי.

כהמשך טבעי למחקר זה, אנו מעוניינים להעמיק את ההבנה על גרפי הקשירות השונים, ולהשתמש בהם בצורה נבונה להשגת הערך האופטימלי של כל פונקציות המטרה שהגדרנו. לאחר מכן, יהיה ניתן לבחון פיתוח אלגוריתמים אשר יתנו תוצאות אופטימליות או מקורבות של פונקציות מטרה על מופעי בעיה שלהם אין פתרון.

בנוסף, מעניין יהיה לבחון עבור גרפים ממשפחות מוכרות, מהי הוספת הקודקודים שתשיג ערך אופטימלי לפונקציות המטרה שהגדרנו.

פרק 8 – ביבליוגרפיה

1. S. Anily, J. Bramel, and A. Hertz. "A $\frac{5}{3}$ -approximation algorithm for the clustered traveling salesman tour and path problems", *Oper. Res. Lett.*, 24(1-2):29--35, 1999.
2. E..M. Arkin, R. Hassin, and L. Klein. "Restricted delivery problems on a network." *Networks*, 29(4):205--216, 1997.
3. T.H. Cormen, C.H. Leiserson, R.L. Rivest "Introduction to Algorithms" The MIT Press, Cambridge, 1990.
4. D. Gusfield "Algorithms on strings, trees, and sequences", Cambridge University Press, Cambridge, 1997. *Computer science and computational biology*.
5. N. Guttmann-Beck, R. Hassin, S. Khuller, and B. Raghavachari. "Approximation algorithms with bounded performance guarantees for the clustered traveling salesman problem." *Algorithmica*, 28(4):422--437, 2000.
6. N. Guttmann-Beck, E. Knaan, and M. Stern. "The TSP-path for intersecting clusters." In Preparation.
7. E. Korach and M. Stern. "On a clustering problem in the industry." Proceedings of the 13th Conference of Industrial Engineering and Management, (Tel-Aviv, Israel, 2004)
8. E. Korach and M. Stern. "The clustering matroid and the optimal clustering tree." *Math. Program.*, 98(1-3, Ser. B):385--414, 2003. *Integer programming (Pittsburgh, PA, 2002)*
9. E. Korach and M. Stern. "The Optimal Complete Stars Clustering Tree Problem", *Discrete Applied Mathematics, in honor of Peter Hammer*, 156 (4), 444-450, 2008.
10. F. C. J. Lokin. "Procedures for traveling salesman problems with additional constraints" *European J. Oper. Res.*, 3:135--141, 1978.
11. J. Y. Potvin and F. Guertin. "A genetic algorithm for the clustered traveling salesman problem with a prespecified order on the clusters." *Advances in computational and stochastic optimization, logic programming, and heuristic search, volume~9 of Oper. Res./Comput. Sci. Interfaces Ser.*, pages 287--299. *Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1998*.
12. J. Scott. *Social Network Analysis: A Handbook* London Sage, 1991.
13. M. Stern. "The Optimal Clustering Tree Problem" *Dissertation, (Ben-Gurion University)*, 2003.
14. S. Wasserman and K. Faust. "Social Network Analysis: Methods and Applications" *Cambridge University Press, Cambridge, 1994*.